LA TOPOLOGÍA

POINCARÉ

Las matemáticas pierden las formas



NATIONAL GEOGRAPHIC

HENRI POINCARÉ es reconocido como uno de los grandes de las matemáticas, y no solo porque su huella haya quedado estampada en prácticamente todos los ámbitos de la disciplina, sino también porque su reconocimiento como científico trascendió las fronteras de su Francia natal para alcanzar dimensiones planetarias. Sus trabajos fueron fundamentales en el desarrollo de la teoría especial de la relatividad, y sobre todo en topología, rama de las matemáticas que trata de la continuidad y que afirma que dos objetos son iguales si uno de ellos podemos deformarlo de manera continua, sin cortarlo ni agujerearlo, hasta transformarlo en el otro. La epistemología y la divulgación científica también centraron el interés de uno de los matemáticos más universales, cuya labor fue determinante en el despegue que experimentó la ciencia a comienzos del siglo xx.

LA TOPOLOGÍA

POINCARÉ

Las matemáticas pierden las formas

NATIONAL GEOGRAPHIC

ALBERTO TOMÁS PÉREZ IZQUIERDO es catedrático
de Electromagnetismo en la Universidad de Sevilla.
Ha publicado textos introductorios y ensayos divulgativos
en el ámbito de la física, y colabora con numerosos proyectos
universitarios de acercamiento de la ciencia al gran público.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Académie Française: 121; Age Fotostock: 115b, 163ai, 163ad; Agencia de prensa Meurisse/Biblioteca Nacional de Francia: 23; Miquel Albertí: 55b; Album: 81ai, 115d, 131b; American Libraries: 94; Archivo RBA: 25 ad, 25 b, 37d, 131ai; A. Blomberg: 62; Benjamin Couprie: 163b; H.S.M. Coxeter: 59d; Freeman J. Dyson/Harold Falk/American Mathematical Monthly: 86; M.C. Escher: 60; Roger Fry/National Portrait Gallery: 153; Harris & Ewing/Biblioteca del Congreso de Estados Unidos: 18; Max Liebermann/Instituto de Matemáticas de la Universidad de Gotinga: 64; Louis Figuier: 48; Robert Krewaldt/Biblioteca del Congreso de Estados Unidos: 37i; Museo Boerhaave, Leiden: 131ad; Victor Jean Nicolle: 81b; Eugène Pirou: 25ai, 46; Princeton University Press: 59i; Charles Reutlinger/Smithsonian Institution Libraries: 139; Smithsonian Libraries: 160; Carl Steffeck: 20; Universidad de Saint Andrews, Escocia: 115ai; US Army: 55a; Émile Zola/*L'Aurore*: 127; Anders Zorn: 81ad.

ISBN: 978-84-473-7779-4
Depósito legal: B-20897-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

En la ciudad francesa de Nancy, en la esquina entre la Grand Rue y la Rue de Guise, hay una pequeña farmacia. Este establecimiento ocupa hoy en día, tal y como lo hacía hace más de 150 años, los bajos de un edificio de tres plantas, el Hotel Martigny. En la fachada que da a la Grand Rue, a la altura del primer piso, hay una placa conmemorativa que dice: «En esta casa nació el 29 de abril de 1854 Henri Poincaré, miembro de la Academia Francesa y de la Academia de Ciencias, muerto en París el 17 de julio de 1912».

No muy lejos de allí, en la Rue de la Visitation, se encuentra el Liceo Henri Poincaré, llamado así en honor del ilustre hijo de la ciudad. Y andando por la fachada principal de esta institución en dirección a la Grand Rue se llega a la calle Henri Poincaré. Casi paralela a esta última, discurre otra calle más ancha y más larga, la calle Raymond Poincaré, dedicada a su primo, el presidente de la República Francesa durante la Primera Guerra Mundial. La ciudad honra así a sus ciudadanos más distinguidos. En Francia, la figura del político parece ser más valorada que la del matemático, a juzgar por la importancia de las calles que les dedican, pero Henri Poincaré perteneció a esa clase de hombres cuyo legado traspasa todas las fronteras, las espaciales y las temporales.

A pesar de que Poincaré vio su ciudad natal invadida por las tropas alemanas siendo adolescente, el resto de su vida transcurrió en un período de paz, el comprendido entre la guerra franco-pru-

siana de 1870-1871 y el comienzo de la Primera Guerra Mundial en 1914, de la que ya no fue testigo. En el plano político, la Tercera República, instaurada tras la caída del emperador Napoleón III y el fracaso de la Comuna de París, consiguió sobrevivir gracias a una Constitución flexible que permitió la alternancia en el poder de gobiernos de distinto signo. Poincaré nunca ejerció una actividad política, pero siempre estuvo bien relacionado con el poder y no solo por la buena sintonía que mantuvo con su primo.

Fue esta una época de un trepidante crecimiento económico e industrial. Y, al igual que en Alemania, la ciencia —elemento fundamental para el desarrollo tecnológico— era promovida y financiada tanto estatal como privadamente. En los últimos años del siglo XIX se produjo la electrificación de buena parte de Europa, así como la difusión del telégrafo. En los primeros años del siglo XX surgió la telegrafía sin hilos. Estos avances planteaban problemas, tanto teóricos como prácticos, que interesaron a científicos e ingenieros de todos los países avanzados.

En Francia, al igual que en Alemania, a finales del siglo XIX se consolidó un sistema de enseñanza público a todos los niveles educativos. Las Grandes Écoles, que databan de la época de la Revolución, se consolidaron como centros de élite de la enseñanza superior y en ellas estudiaron los hombres más brillantes de la época, ya fueran ingenieros, matemáticos, economistas o políticos. Poincaré se formó en uno de estos centros.

París, donde Poincaré vivió la mayor parte de su vida, sufrió una gran remodelación a finales del siglo XIX. En 1889, con motivo de la Exposición Universal de ese año, finalizó la construcción de la Torre Eiffel. Durante la Exposición Universal de 1900 se construyó la primera línea del metro. La ciudad se modernizó y expandió, convirtiéndose en una de las grandes urbes mundiales. Era *La Belle Époque*, un período caracterizado, al menos en apariencia, por el optimismo, la expansión económica y social, la confianza en la ciencia y el progreso. También fue una época de renovación artística, en la que surgieron movimientos estéticos que siguen siendo admirados hoy en día.

Poincaré se distinguió desde pequeño por una excepcional capacidad para las matemáticas. En el otoño de 1873 ingresó en

la École Polytechnique, una de las Grandes Écoles, y de allí pasó a la Escuela de Minas de París. Se licenció como ingeniero de minas en 1878, pero su principal interés eran las matemáticas y, por este motivo, simultaneó los estudios de ingeniería con los de matemáticas en la Sorbona. Ejerció algunos meses como ingeniero de minas en Vesoul, durante los cuales fue testigo de los estragos causados por un terrible accidente. A finales de 1879 obtuvo una plaza de profesor en la Universidad de Caen. A partir de ese momento ya se dedicó en exclusiva a las matemáticas y la ciencia.

El primero de los grandes trabajos de Poincaré estuvo centrado en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Inventó unas funciones, que él llamó «fuchsianas» y que hoy en día se conocen como «automórficas», que servían para resolver ecuaciones diferenciales muy generales. Este trabajo le valió el reconocimiento de los matemáticos franceses —en especial de Charles Hermite, que había sido profesor suyo en la escuela politécnica y que le apoyaría durante el resto de su carrera— y también le dio a conocer en el ámbito internacional. Así, el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler se fijó en sus trabajos, iniciándose entonces una relación profesional y de amistad que sería muy provechosa para ambos.

Pero el nombre de Henri Poincaré saltó a la fama mundial cuando en enero de 1889 ganó un concurso matemático convocado por el rey Óscar II de Suecia. El trabajo presentado por Poincaré trataba sobre el problema de los tres cuerpos: encontrar la trayectoria de tres cuerpos sometidos a su mutua atracción gravitatoria. Aunque la concesión del premio no estuvo exenta de dificultades —Poincaré cometió un error en la memoria original que él mismo detectó y corrigió—, lo cierto es que este trabajo representa una de las mayores aportaciones de Poincaré a la historia de las matemáticas. Al ser el problema de los tres cuerpos de una enorme complejidad, Poincaré no intentó una resolución general, sino que buscó una comprensión cualitativa de la estructura general de las soluciones. En su trabajo desarrolló toda una serie de conceptos y herramientas matemáticas nuevas que hoy en día se usan en lo que se conoce como *teoría de los sistemas dinámicos*.

Esta teoría matemática se aplica a campos tan diversos como la física, la biología, la química o la economía.

Poincaré ocupó diversas cátedras de Física y Matemáticas en París a partir de 1881. El premio del rey de Suecia le convirtió en uno de los hombres de ciencia más conocidos de Francia y sus trabajos posteriores no hicieron sino acrecentar su fama. Entre estos trabajos se encuentran los dedicados a la topología, de la que es considerado como uno de sus fundadores. La topología es la rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma. En topología, dos objetos son equivalentes si podemos deformar uno de ellos de manera continua, sin hacer cortes ni agujeros, hasta convertirlo en el otro. Para un topólogo, un triángulo y un cuadrado son la misma cosa. La topología estudia propiedades más generales que las que estudia la geometría. Se trata de caracterizar un objeto sabiendo de cuántas partes está compuesto, si tiene agujeros, si posee una frontera definida, si es finito o, en cambio, se extiende sin fin, etc. Poincaré se interesó por la topología a partir de sus trabajos con las ecuaciones diferenciales y el problema de los tres cuerpos. Y ello le llevó a la necesidad de generalizar los conceptos y las herramientas matemáticas de la topología a espacios de más de tres dimensiones.

El nombre de Poincaré volvió a aparecer en los medios de comunicación a principios del siglo XXI con motivo de la resolución de un problema topológico que él enunció cien años antes, problema que se conoce como «la conjetura de Poincaré». Convertida ya en teorema desde que fue resuelta, esta afirma, en un lenguaje no demasiado técnico, que «toda superficie de n dimensiones que sea finita, no tenga agujeros y no esté retorcida, la podemos deformar continuamente hasta convertirla en una esfera». En el capítulo cuatro daremos un enunciado más riguroso, e introduciremos los conceptos matemáticos necesarios para hacerlo. Poincaré no propuso la conjetura como tal, sino que lo hizo a modo de pregunta, aunque todos los matemáticos posteriores a él esperaban que la respuesta fuera positiva. El problema se reveló tan difícil de resolver que en el año 2000 el Instituto Clay lo incluyó entre uno de los

problemas del milenio, y prometió un millón de dólares a quien lo resolviera. La demostración final fue obra del matemático ruso Grigori Perelman (n. 1966), quien, tras varios años de trabajo en solitario, lo resolvió a inicios del presente siglo. Perelman se hizo por ello merecedor de la medalla Fields, uno de los mayores reconocimientos que puede recibir un matemático, y del premio de los problemas del milenio, pero rechazó ambos.

Henri Poincaré fue también uno de los físicos teóricos más importantes de su tiempo. Especialmente crucial fue su contribución a la teoría especial de la relatividad, de la que es, junto a Lorentz y Einstein, uno de sus fundadores. Ya en torno a 1900 Poincaré apostaba por mantener el principio de relatividad como un principio básico de la física. Este principio se puede enunciar diciendo que las leyes de la física son las mismas para todos los observadores, independientemente de si están o no en movimiento. El espacio absoluto no existe y es, por tanto, imposible detectar el movimiento de un objeto respecto de este espacio absoluto. Solo es posible detectar el movimiento relativo entre dos objetos. Además, Poincaré también admitía la constancia de la velocidad de la luz, aunque como una convención inevitable. Recordemos que estos dos principios, el principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz, son los dos postulados que introdujo Einstein en su primer artículo sobre la relatividad.

Entre los hallazgos de Poincaré estaba el hecho de que la sincronización mediante rayos luminosos llevaba a que la simultaneidad de dos sucesos era relativa, ya que dependía del observador. Un hecho este que la teoría de la relatividad pondría sobre bases firmes. En 1905 Poincaré escribió el artículo «Sobre la dinámica del electrón», cuyo contenido es en gran parte similar al artículo «Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento» que Albert Einstein publicó ese mismo año, y que se considera el artículo fundacional de la teoría de la relatividad. Las predicciones cuantitativas de ambos científicos para el movimiento de un electrón sometido a campos eléctricos y magnéticos son iguales, y también son iguales a las que ya había deducido Lorentz. La diferencia entre estos artículos es, sobre todo, de interpretación. En la interpretación de las consecuencias cinemáticas de las transformacio-

nes de las distancias y los tiempos —las transformaciones de Lorentz— Einstein es más audaz que Lorentz y Poincaré, y rompe de una manera más explícita con los antiguos conceptos de espacio y tiempo.

Henri Poincaré también destacó por sus reflexiones filosóficas, especialmente en el campo de la epistemología o filosofía de la ciencia. Publicó muchos artículos sobre este tema y se convirtió en autor de éxito con una colección de ensayos dirigidos al gran público, en los que combinaba la disquisición filosófica con la divulgación científica. Poincaré formó parte de muchas academias y sociedades científicas y fue un hombre social y profesionalmente muy reconocido. Su prestigio, no solo en Francia, era enorme y ello le permitía frecuentar los círculos más selectos de la vida intelectual y política de la época. Falleció por una complicación inesperada tras una operación de próstata. A su entierro acudieron grandes personalidades de la cultura y la política francesas y su muerte fue lamentada por todos los científicos del momento, dentro y fuera de Francia.

1854 El 29 de abril nace en Nancy Jules Henri Poincaré.

1862 Ingresa en el liceo de Nancy, hoy llamado en su honor Lycée Henri Poincaré. Su educación primaria la recibió de un profesor particular.

1873 Ingresa en la École Polytechnique. En paralelo a sus estudios de ingeniería, estudia matemáticas.

1874 Publica su primer trabajo original en matemáticas.

1876 Se examina de matemáticas, con éxito, en la Universidad de la Sorbona.

1878 Se licencia como Ingeniero de Minas.

1879 En marzo es designado ingeniero de minas de tercera clase en Vesoul. En agosto obtiene su doctorado en Matemáticas por la Universidad de París. En septiembre se produce el accidente en la mina Magny y tiene que elaborar un detallado informe. En diciembre obtiene una plaza de profesor de Cálculo Diferencial e Integral en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Caen.

1881 El 20 de abril contrae matrimonio con Louise Poulain d'Andecy. En octubre obtiene una plaza en la Facultad de Ciencias de la Sorbona, en París.

1883 Obtiene el puesto de tutor en la École Polytechnique.

1886 Obtiene la cátedra de Física Matemática y Probabilidad.

1887 Es elegido miembro de la Academia de Ciencias.

1889 Obtiene el premio del rey de Suecia por su trabajo «Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica».

1895 Publica en el *Journal de l'École Polytechnique* el artículo «*Analysis situs*», el primero de sus trabajos dedicados a la topología.

1899 Envía una carta sobre el caso Dreyfus, que es leída en el segundo juicio al que fue sometido el militar.

1904 Enuncia la conjetura que lleva su nombre.

1905 Presenta a la Academia de Ciencias un resumen de su artículo «Sobre la dinámica del electrón», que será publicado en 1906.

1908 Es elegido miembro de la Academia Francesa.

1911 Asiste, junto con Einstein, Planck y Lorentz, entre otros científicos, al primer Congreso Solvay, celebrado en Bruselas.

1912 Muere en París el 17 de julio como consecuencia de las complicaciones derivadas de una operación de próstata.

CAPÍTULO 1

¿Rigor o intuición?

Durante todo el siglo XIX las matemáticas experimentaron un gran impulso. Los grandes matemáticos como Gauss, Cauchy o Riemann resolvieron muchos problemas antiguos y, sobre todo, abrieron el camino a nuevos métodos e ideas, como la geometría no euclídea. Francia gozó de una prestigiosa escuela matemática que incluía grandes nombres como el propio Cauchy, Laplace, Lagrange y Hermite. En este contexto, Henri Poincaré quedó muy pronto cautivado por la disciplina que le haría famoso.

Jules Henri Poincaré nació en Nancy el 29 de abril de 1854. Su padre, Émile Léon Poincaré, era médico y también ejercía de profesor de Anatomía y Fisiología en la Escuela de Medicina de aquella ciudad. Su madre, Eugénie Launois, provenía de una familia adinerada de Arrancy, una localidad de la región de Lorena. Allí la familia tenía una finca que fue su lugar de vacaciones y recreo durante muchos años. En esta casa de campo podían llegar a juntarse hasta sesenta personas en torno a la abuela materna de Poincaré, Euphrasie. Parece ser que la anciana estaba especialmente dotada para los juegos de cartas y el cálculo mental.

Antes de que Poincaré naciera, su abuelo había establecido una farmacia en Nancy, y con el tiempo construyó una gran casa, que se convirtió a la vez en laboratorio de preparación de medicamentos, tienda y residencia. En esta mansión convivieron Henri, su hermana Aline, sus padres y sus abuelos. La casa estaba siempre llena de gente y no era extraño que algunos familiares vinieran a pasar allí varios días. Henri Poincaré gozó así de una infancia feliz, rodeado de sus padres, su hermana, sus abuelos y otros familiares y amigos que frecuentaban la casa familiar.

Cuando tenía cinco años padeció un episodio de difteria, una enfermedad grave que aún lo era más por aquel entonces. Poincaré sobrevivió, pero tuvo una larga convalecencia: durante dos meses no pudo andar y tardó hasta nueve meses en recuperar el habla

RAYMOND POINCARÉ (1860-1934)



Henri Poincaré tenía dos primos por parte de padre, Raymond y Lucien, ambos hijos del hermano mayor de su padre, Antoni. Raymond Poincaré nació en Barle-Duc y estudió Derecho en la Universidad de París. A los treinta y tres años entró en el Gobierno y, a partir de entonces, ocupó varias carteras, siendo primer ministro en cinco ocasiones. En 1913 fue elegido presidente de la República Francesa, cargo que ocupó hasta 1920. Dirigió el país, por tanto, durante la Primera Guerra Mundial y tuvo una participación destacada en las negociaciones de paz, mostrándose muy duro con Alemania en sus exigencias de reparación. Henri y su primo Raymond mantuvieron una estrecha relación. De estudiantes, les gustaba mantener largar conversaciones sobre filosofía. Cuando ya ambos eran personalidades respetadas, discutían sobre todo tipo de asuntos, incluidos los nombramientos y la concesión de distinciones. También coincidían esporádicamente en reuniones, actos o cenas de artistas e intelectuales franceses organizados por miembros destacados de la sociedad parisina de la época. Ambos fueron miembros de la Academia Francesa.

completamente, ya que la difteria había producido una parálisis de laringe. Su hermana pequeña, Aline, fue un gran apoyo para él en esos meses y juntos inventaron un lenguaje de signos para poder comunicarse. Aline y él permanecieron muy unidos toda su vida.

Henri no fue a la escuela hasta los ocho años. Hasta ese momento, un profesor privado amigo de la familia se encargó de su educación, así como la de su hermana y la de sus propios hijos. En esa época, era esta una práctica relativamente habitual entre las familias de buena posición. Las clases eran variadas y se centraban en la lectura y la escritura, principalmente. Cuando Henri ingresó en la escuela en 1862, inmediatamente se convirtió en el número uno de su clase, algo que su tutor ya preveía. Tenía una memoria prodigiosa y no tomaba apuntes, porque se acordaba de todo

lo que oía. Era capaz de leer un libro una sola vez y recordar luego en qué página aparecía una frase concreta. Se cuenta que, años después de hecho un viaje, era capaz de recitar de memoria el nombre de las estaciones en las que el tren había hecho parada.

En la infancia de Henri no faltaron los viajes. En el verano de 1866 visitó con su familia Frankfurt y Colonia. En el verano de 1867 los Poincaré acudieron a la Exposición Universal de París, y dos años después fueron a Londres. Los viajes terminaban siempre con una visita a la finca materna en Arrancy.

Cuando Poincaré tenía dieciséis años, en julio de 1870, estalló la guerra franco-prusiana. Las tropas alemanas invadieron su ciudad natal. Henri ayudó a su padre, a quien habían puesto a cargo de una ambulancia, a atender a los heridos. La familia Poincaré permaneció en la Nancy ocupada y un oficial alemán fue alojado en la casa familiar. Henri aprovechó las circunstancias para mejorar su alemán, idioma que llegó a hablar con fluidez. Con el tiempo, dominaría también el inglés.

La guerra franco-prusiana tuvo grandes consecuencias para la historia de Francia y, muy especialmente, para la región donde Poincaré nació y se crió: Lorena. En el tratado de paz, que se firmó en 1871, Alsacia y gran parte de Lorena fueron cedidas a Alemania. Metz y Estrasburgo quedaron bajo el dominio alemán, aunque Nancy siguió siendo francesa. La ocupación alemana de Metz y Estrasburgo hizo que muchos franceses, a los que se permitió abandonar dichas ciudades, se refugiaran en Nancy. Como buena parte de esta población estaba compuesta por comerciantes, artesanos e intelectuales, Nancy vivió tras la guerra una época de especial dinamismo. La universidad de la ocupada Estrasburgo fue transferida a Nancy, y lo que había sido hasta entonces la Facultad de Medicina de Estrasburgo se fundió con la Escuela de Medicina de Nancy. El padre de Henri obtuvo una cátedra en la nueva institución en 1878. Otra consecuencia de la guerra, importante en la vida de Henri, fue la llegada a Nancy, como refugiado proveniente de Alsacia, del futuro matemático Paul Appell, con quien Poincaré mantuvo una gran amistad toda su vida.

Durante la guerra Poincaré estudió en el liceo de Nancy para obtener el bachillerato en artes. En agosto de 1871 aprobó con

LA GUERRA FRANCO-PRUSIANA

Napoleón III había accedido al poder a través de las elecciones a la presidencia de la Segunda República en 1848. Poco después, en 1851, dio un golpe de Estado y proclamó el Segundo Imperio. A ello siguieron cerca de veinte años de gobierno autoritario en los que Francia emprendió su modernización y desarrolló una intensa política internacional: participó en la unificación de Italia, la guerra de Crimea y diversos conflictos más. Simultáneamente, se produjo la unificación de Alemania y la ascensión de Guillermo I, bajo la tutela de Otto von Bismarck. A finales de la década de 1860, ambas potencias rivalizaban por el dominio de la política europea. La confrontación militar parecía cada vez más probable, y el episodio que finalmente prendió la mecha fue el intento alemán de colocar a un miembro de la familia del emperador en el trono de España. Ante las protestas de Francia, Alemania retiró a su pretendiente, el príncipe de Hohenzollern, pero la insistencia del ministro de Asuntos Exteriores francés, alentado por la emperatriz Eugenia, de que Alemania renunciara a toda pretensión en el futuro, empeoró la situación. El 19 de julio de 1870 Francia declaró la guerra a Alemania, pero esta no pudo serle menos favorable: el emperador Napoleón fue hecho prisionero y destituido, y Francia tuvo que renunciar a la región fronteriza de Alsacia y a gran parte de Lorena. Desde ese momento, y hasta la Primera Guerra Mundial, el ánimo de revancha estuvo presente en gran parte de la sociedad francesa.



El general Reille entrega a Guillermo I la carta de rendición de Napoleón III, óleo de Carl Steffeck realizado en 1884.

buena nota, pero sin sobresalientes. Brilló especialmente en filosofía y latín. En noviembre del mismo año, se examinó del bachillerato en ciencias. Sus resultados fueron peores en este examen. Había llegado tarde al examen y, con las prisas, había interpretado mal el enunciado del primer problema, precisamente de matemáticas, por lo que había sacado un cero en ese problema. A pesar de ello, los examinadores, sabiendo de la valía del joven Poincaré, le otorgaron el título.

Tras obtener el bachillerato, Poincaré empezó a preparar el llamado *concours*, la prueba de acceso a las Grandes Écoles. El joven se sumergió en el estudio de varios libros de matemáticas, los cuales formaban un compendio de los conocimientos matemáticos de la época. De entre todos ellos hubo uno que ejerció una notable influencia en Henri: *La geometría superior*, de Michel Chasles (1793-1880). Debido a la influencia de los grandes matemáticos franceses de la Revolución, la geometría francesa de la época estaba dominada por el álgebra y la geometría analítica, y existía cierto desprecio hacia la representación gráfica y los argumentos cualitativos.

En la introducción a su obra titulada *Mecánica analítica*, el gran físico y matemático francés Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) escribía:

> No encontraremos ni una sola figura en esta obra. Los métodos que en ella expongo no requieren ni construcciones ni razonamientos geométricos ni mecánicos, sino solamente operaciones algebraicas, sujetas a un proceder regular y uniforme. Aquellos que gustan del análisis verán con placer que la mecánica se convierte en una nueva rama más de él, y me estarán agradecidos por haber extendido así este campo.

Hay una diferencia radical en el aspecto de los libros del creador de la mecánica clásica, Isaac Newton (1643-1727), y la obra de Lagrange. Newton llenaba sus páginas de construcciones geométricas y resolvía mediante ellas todo tipo de problemas. La propuesta de Lagrange, culminación de la obra de varios grandes matemáticos europeos del siglo XVIII, de los que cabría destacar a

Leonhard Euler (1707-1783), sistematizaba la forma en que se debían aplicar las leyes de Newton a un problema cualquiera. El físico no dependía ya de su capacidad de visualización espacial y de sus dotes de dibujante para resolver los problemas. Incluso hoy en día el estudiante de física con dificultades para seguir los razonamientos geométricos y las figuras ve con alivio que la mecánica lagrangiana le libra de tales cuestiones.

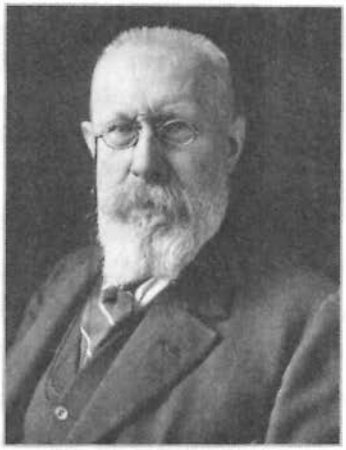
«La lógica y la intuición tienen cada una su propio papel necesario. Ambas son indispensables. La lógica, que es la única que puede dar certezas, es el instrumento de la demostración. La intuición es el instrumento de la invención.»

— Henri Poincaré en el Congreso Internacional de Matemáticas de París de 1900.

Pero tal vez Lagrange había ido un poco demasiado lejos, y Chasles proponía que los dos tipos de razonamiento, el analítico y el gráfico, debían complementarse. Es difícil calibrar cómo de profunda fue la influencia de Chasles en Henri, pero no cabe duda de que uno de los rasgos más característicos del pensamiento matemático de Poincaré iba a ser la combinación del argumento cualitativo y la imaginación espacial con el análisis matemático y la manipulación algebraica. Si, simplificando la evidencia científica, podemos decir que nuestro hemisferio cerebral izquierdo está especializado en los razonamientos secuenciales y analíticos, mientras que el derecho lo está en encontrar patrones globales y la visualización espacial, Poincaré iba a sacar todo el partido al trabajo conjunto de sus dos hemisferios.

Durante 1872 y parte de 1873 Henri preparó el *concours*. Fue en el liceo donde estudiaba donde conoció a Paul Appell. Este escribió años más tarde una biografía de su amigo y gracias a este texto tenemos una idea de cómo era el joven Poincaré. Tanto sus compañeros como profesores se sentían al principio un poco irritados porque se sentaba en clase con una hoja de papel delante en la que apenas escribía un par de notas. Para colmo, ¡la hoja era siempre la misma! Pero pronto se dieron cuenta de que no lo hacía

PAUL APPELL (1855-1930)



Appell nació en Estrasburgo, Alsacia. Cuando esta localidad fue anexionada por Alemania, su familia se mudó a Nancy, donde conoció a Henri Poincaré. Appell estudió en la École Normale Supérieure de París, donde se graduó con el primer puesto. En 1881 se casó con Amélie Bertrand, sobrina de dos matemáticos, Joseph Bertrand y Charles Hermite. Este último sería un gran apoyo para Appell en su carrera científica y universitaria. En 1885 Appell obtuvo la cátedra de Mecánica en la Sorbona de París y en 1892 ingresó en la Academia de Ciencias. Escribió cientos de artículos sobre análisis, geometría y mecánica, resolviendo los más variados problemas en estas disciplinas. Su nombre está asociado a los polinomios de Appell para la resolución de ecuaciones diferenciales y a la ecuación de Gibbs-Appell en mecánica. Fue una de las mayores autoridades científicas en la Francia de su tiempo y detentó varios puestos de responsabilidad en el gobierno universitario, siendo decano de la Facultad de Ciencias de la Sorbona y rector de esta universidad. Gran amigo de Poincaré, escribió una biografía de este en 1925.

por suficiencia, sino de manera natural, y siempre estaba dispuesto a ayudar a los demás. Appell contaba que Poincaré hablaba de manera entrecortada, y se sumía en sus pensamientos entre frase y frase. No era muy dado a dar explicaciones extensas y llegó incluso a recibir alguna advertencia por parte de los profesores en el sentido de que en los exámenes podía llegar a no ser entendido. Este estilo excesivamente sintético fue luego un rasgo característico de sus escritos matemáticos. En esos años Appell y Henri mantenían largas conversaciones mientras volvían del liceo y hablaban tanto de matemáticas como de filosofía o de política. Se forjó así una profunda amistad.

Appell y Poincaré se presentaron en París en julio de 1873 con el objetivo de realizar el examen de acceso a la École Normale

Supérieure. Paul Appell obtuvo el tercer puesto de entre todos los examinados y Poincaré quedó quinto. Se había equivocado en un dibujo y planteó la resolución del problema de forma no ortodoxa. En agosto se presentó al examen para la École Polytechnique. Aquí sí que todo fue bien y Poincaré causó una honda impresión en el tribunal examinador, especialmente en el examen oral. En esta ocasión dio muestras de toda su capacidad como matemático. Obtuvo el primer puesto.

LAS MATEMÁTICAS ANTES DE POINCARÉ

Henri Poincaré fue el mayor matemático francés de su generación. Su capacidad intelectual, unida a una entrega total a la ciencia, que constituyó el eje en torno al cual giró toda su vida, le hicieron trabajar en todas las ramas de las matemáticas e incluso contribuir a fundar alguna de ellas. Su interés no conocía límites, y por ello también trabajó en los diversos campos de la física de su tiempo. Es necesario, para comprender su obra, hacer un breve repaso a las matemáticas y la física de la segunda mitad del siglo XIX.

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Isaac Newton y Gottfried Leibniz (1646-1716) son considerados los creadores del cálculo infinitesimal: el cálculo diferencial e integral. Pero Newton no expresó las leyes de la mecánica enteramente en ese lenguaje, sino que utilizó dibujos y argumentos geométricos para resolver los problemas mecánicos que planteaba. La sistematización matemática de las leyes de la mecánica fue obra de científicos posteriores, de entre los que cabe destacar a Euler y, como ya se ha apuntado, a Lagrange.

Euler fue probablemente el matemático más prolífico de la historia. Trabajó en todos los campos de las matemáticas y una buena parte de la notación que usamos hoy en día se la debemos a él. La mayoría de los matemáticos que le siguieron aprendieron

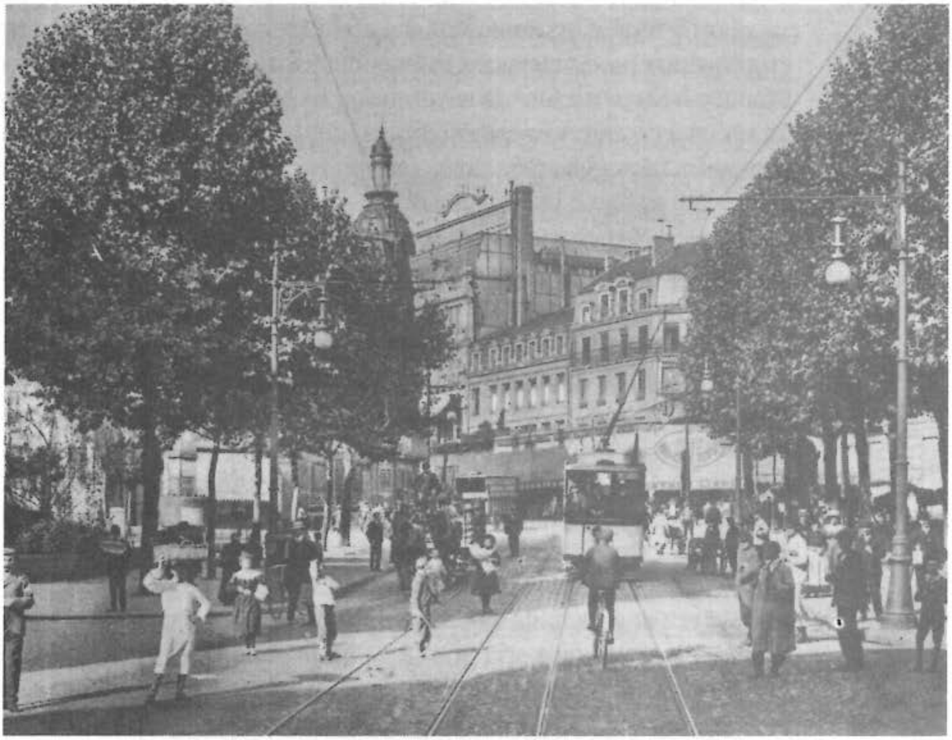




FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Henri Poincaré en una fotografía tomada en 1887.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Michel Chasles, autor de *La geometría superior*, un texto que ejerció una notable influencia en el joven Poincaré.

FOTO INFERIOR:
Vista de la Place Saint Jean de Nancy, la localidad natal de Poincaré, en una postal que data de principios del siglo XX.



cálculo diferencial e integral leyendo sus tratados. En lo que aquí nos interesa, él y Lagrange redujeron la mecánica newtoniana al planteamiento y resolución de ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparece como incógnita el ritmo al que cambia una magnitud determinada, lo que técnicamente se conoce como su *derivada*. Por ejemplo, imaginemos un depósito lleno de agua que vaciamos por medio de un grifo que hay en su base. La velocidad con la que sale el agua depende de su altura: cuanto mayor sea la altura del agua en el depósito, más rápida saldrá por el grifo. Si se quiere calcular cómo varía en el tiempo dicha altura, debe formularse una ecuación diferencial: la derivada temporal de la altura (el ritmo al que cambia el nivel del agua en el depósito) es una función de la altura. La resolución de la ecuación da el nivel del agua en el depósito en función del tiempo, y permite conocer la velocidad con la que sale el agua en cada instante y cuánto tardará el depósito en vaciarse.

Los físicos y matemáticos del siglo XIX consiguieron formular en términos de ecuaciones diferenciales multitud de problemas prácticos. En particular, la segunda ley de Newton dice que la masa de un cuerpo por su aceleración es igual a la fuerza a la que está sometido. La aceleración de un cuerpo es el ritmo al que cambia su velocidad, es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. A su vez, la velocidad de un cuerpo es el ritmo al que cambia su posición, su derivada. De esta forma, la segunda ley de Newton se traduce en una ecuación diferencial cuya resolución proporciona la posición del cuerpo en función del tiempo, esto es, su trayectoria.

El siglo XIX conoció un gran avance en la resolución de las ecuaciones diferenciales, porque su estudio era de capital importancia para varias áreas de la astronomía, la física en general o la ingeniería. Una idea de la importancia que se daba a esta cuestión es el premio otorgado por la Academia de Ciencias de París en 1879 al trabajo que mejor supusiera «un avance significativo en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de una sola variable». El premio era una medalla valorada en 3000 francos. Poincaré se presentó a esta convocatoria y, aunque no la ganó, fue el principio de una larga lista de trabajos sobre las ecuaciones diferenciales que le introducirían en la élite de las matemáticas europeas.

LA MECÁNICA CELESTE

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) dejó una profunda huella en la física y las matemáticas del siglo XIX, especialmente en Francia. Su *Mecánica celeste* constituyó durante años la obra fundamental de los astrónomos de Europa, ya que en este tratado se exponían los métodos para calcular y predecir la posición de los planetas del sistema solar. Aunque Newton había formulado su ley de gravitación universal, y con ella explicado las leyes establecidas por Johannes Kepler (1571-1630) a propósito del movimiento planetario, muchos eran los problemas que dejó abiertos. Newton solo había podido resolver lo que se conoce como «el problema de los dos cuerpos»; esto es, dos astros en mutua atracción gravitatoria. Pero casos como el del movimiento de la Luna, en el que la atracción del Sol ejerce una fuerte perturbación sobre su órbita alrededor de la Tierra, no pudieron ser completamente resueltos por el gigante inglés. El caso de la Luna es uno de los ejemplos del denominado problema de los tres cuerpos: el Sol, la Tierra y la Luna, en mutua atracción gravitatoria.

Como el Sol es tan grande, comparado con el resto de los cuerpos del sistema solar, cuando estudiamos la órbita de un planeta podemos ignorar, en principio, los demás cuerpos y considerar que el planeta está solamente sometido a la atracción del Sol. Las leyes de Newton predicen una órbita elíptica para los planetas y las observaciones, *grosso modo*, están de acuerdo con esta predicción. Pero una observación más detallada muestra enseguida que hay desviaciones apreciables de este comportamiento. Los matemáticos posteriores a Newton se preguntaban si estas desviaciones eran debidas a la atracción de los otros cuerpos y, si esto era así, si esas desviaciones podían finalmente expulsar a los planetas de sus órbitas. Para ello era necesario resolver el problema de los tres cuerpos. Por ejemplo, las observaciones realizadas por Edmund Halley (1656-1742) mostraban que Júpiter y Saturno no seguían sus órbitas a la velocidad exactamente predicha por las leyes de Kepler: Júpiter parecía acelerarse a la vez que Saturno parecía frenarse. Para estudiar la órbita de Saturno era preciso tener en cuenta no solo la presencia del Sol, sino también la del planeta gigante Júpiter.

Aunque tanto Euler como Lagrange se interesaron por el problema de los tres cuerpos, no hicieron grandes progresos. Solo Lagrange consiguió algunas soluciones particulares, obteniendo determinadas órbitas especiales que hoy en día se usan para colocar satélites en determinadas posiciones privilegiadas (los llamados «puntos de Lagrange»). Fue Laplace el que consiguió idear métodos aproximados para encontrar la órbita de un planeta perturbado por la presencia de otro. Y Laplace encontró que, en general, los movimientos medios de los planetas eran constantes. En el caso de Júpiter y Saturno, Laplace demostró que la aceleración del primero y la desaceleración del segundo eran consecuencia de su atracción mutua y, lo más importante, que su comportamiento era periódico: cada 450 años la situación se revertía y era Júpiter el que se frenaba y Saturno el que se aceleraba. A los 900 años ambos volvían a su posición inicial.

De los trabajos de Laplace cabía sacar dos conclusiones. La primera era que todas las anomalías en el movimiento de los planetas se podían explicar por la atracción gravitatoria de otros planetas. Esta idea llevó al descubrimiento de Neptuno en 1846, porque la órbita de Urano presentaba anomalías que indicaban que había otro cuerpo, desconocido, más alejado del Sol. La segunda conclusión era que el sistema solar es estable. Laplace creyó demostrar que las órbitas de los planetas oscilaban en torno a una trayectoria media que permanecía imperturbable por los siglos de los siglos. Pero esto no resultó ser del todo cierto. El primero que cuestionó esta afirmación fue el también francés Urbain Le Verrier (1811-1877), célebre por predecir la existencia de Neptuno. Le Verrier observó que en el método de Laplace se despreciaban cantidades que no siempre serían despreciables. Ello reabrió el debate de la estabilidad del sistema solar: la conclusión de Laplace de que el sistema era estable podía no ser cierta.

En este contexto, en el verano de 1885 se invitó a todos los matemáticos europeos a participar en el concurso organizado con motivo del sexagésimo cumpleaños del rey Óscar II de Suecia y Noruega, el cual tendría lugar en 1889. Uno de los temas del concurso era avanzar en los métodos matemáticos que pudieran llevar

a la demostración de la estabilidad del sistema solar. A este premio se iba a presentar, y ganarlo, Henri Poincaré.

LA GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA

En su obra *Elementos de geometría*, Euclides (ca. 325-265 a.C.) expuso sus cinco postulados, los axiomas de los que se deducen todos los teoremas de la geometría. Estos axiomas, verdades por sí mismas y que no necesitan demostración, son los siguientes:

1. Dados dos puntos se puede trazar una y solo una recta que los una.

2. Cualquier segmento se puede prolongar de manera continua en cualquier sentido.

3. Es posible trazar una circunferencia con centro en un punto cualquiera y con cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos miden igual y se superponen por traslación.

5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a ella.

El mismo Euclides ya pensaba que el quinto postulado tenía un estatus diferente a los demás y que, tal vez, se podía deducir de los otros cuatro. Los matemáticos, a lo largo de la historia, intentaron demostrarlo a partir de los cuatro anteriores sin conseguirlo. Pero a principios del siglo XIX varios matemáticos comprendieron que, en realidad, era un postulado especial y que se podía construir toda una geometría consistente, es decir, sin contradicciones lógicas, sin imponer esa restricción. Fueron Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolái Lobachevski (1793-1856) y János Bolyai (1802-1860) los que crearon, de manera independiente, las bases de la geometría no euclídea.

El quinto postulado puede ser sustituido por otros enunciados equivalentes. Imaginemos un polígono de cuatro lados como el de la figura 1, de vértices *ABCD*. Supongamos que los ángulos *DAB* y *ABC* son rectos y que los lados *AD* y *BC* tienen la misma longitud. Usando el quinto postulado se puede demostrar que, si *DAB* y *ABC* son rectos, entonces *ADC* y *BCD* también lo son. De hecho el quinto postulado es equivalente a este otro enunciado: si un polígono de cuatro lados *ABCD* con lados *AC* y *BC* iguales tiene los ángulos *DAB* y *ABC* rectos, entonces los otros ángulos también son rectos. A partir de este enunciado se puede invertir la demostración anterior y obtener el enunciado de las paralelas.

En el espacio tridimensional hay tres geometrías posibles, si admitimos el requisito adicional de que el espacio sea homogéneo. Una de ellas es la geometría euclídea, en la que los cuatro ángulos del rectángulo son rectos. Otra es la geometría elíptica, en la que si dos ángulos del cuadrilátero son rectos, los otros dos son obtusos. La otra, descubierta por Lobachevski, es la hiperbólica, en la que los otros dos ángulos son agudos.

El problema del polígono de cuatro lados (fig. 1) y el planteamiento realizado por la geometría euclídea (fig. 2).

FIG. 1

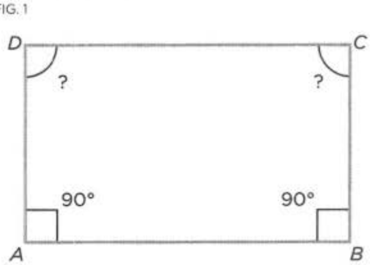
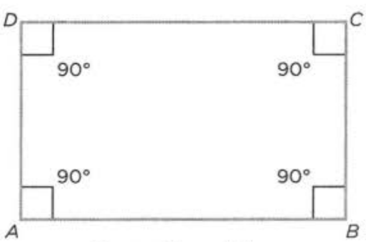


FIG. 2



Geometría euclídea

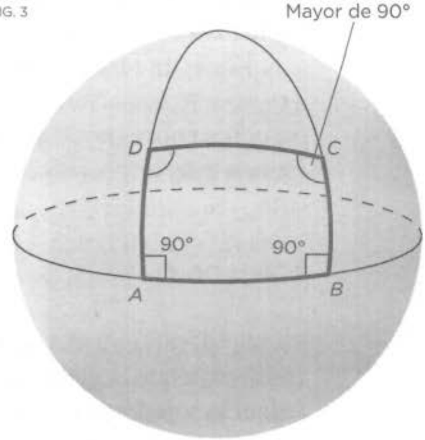
Estas tres geometrías tienen fácil visualización en superficies bidimensionales. La geometría euclídea es la del plano normal y corriente. En ella se cumple el quinto postulado de Euclides: solo es posible trazar una recta paralela por un punto exterior a otro dado. También podemos decir que los cuatro ángulos de un rectángulo son rectos (figura 2), o, lo que constituye otra forma equivalente de ver el problema, que los ángulos de un triángulo suman 180º. Como un plano no está curvado, se dice que en esta geometría la curvatura es cero.

La geometría elíptica es la que encontramos sobre la superficie de una esfera. Si trazamos un «cuadrilátero» sobre la esfera como en la figura 3, usando círculos máximos, vemos que si dos

ángulos son rectos, los otros dos son obtusos. Además, si formamos un triángulo —por ejemplo entre un polo y dos puntos del ecuador—, este tendrá ángulos que suman más de 180°. Claramente, no se cumple el quinto postulado, porque por un punto exterior a una recta «no» es posible dibujar ninguna paralela, ya que todas las líneas que dibujemos sobre la esfera terminarán cortándose en algún punto. Como la superficie de la esfera está curvada y es convexa, se dice que esta geometría corresponde a una curvatura positiva.

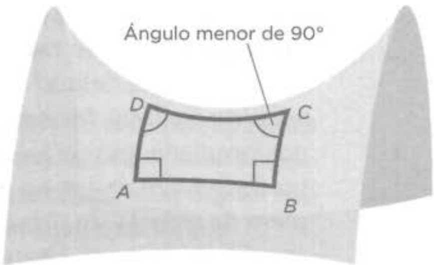
Por último, la geometría hiperbólica es la que encontramos en la superficie de un hiperboloide, o silla de montar, como la de la figura 4. Aquí hay más de una paralela por un punto exterior a una línea, y los ángulos de un triángulo suman menos de 180°. La curvatura es negativa.

FIG. 3



Geometría elíptica

FIG. 4



Geometría hiperbólica

El planteamiento del polígono de cuatro lados según la geometría elíptica (fig. 3) y la hiperbólica (fig. 4).

Si en lugar de restringirnos a una superficie, imaginamos las geometrías posibles en el espacio tridimensional e imponemos la restricción de que el espacio sea homogéneo, es decir, que tenga la misma curvatura en todos los puntos, tenemos, de nuevo, estas tres posibilidades: curvatura cero (espacio euclídeo), curvatura positiva (espacio elíptico) y curvatura negativa (espacio hiperbólico).

El propio Gauss se preguntó si el espacio en que habitamos es realmente euclídeo o, por el contrario, tiene curvatura, aunque esta sea muy pequeña. Bernhard Riemann (1826-1866) elaboró aún más la teoría de los espacios no euclídeos inventando todo un formalismo matemático que permitía tratar espacios con curvatu-

ra no uniforme. Fue este formalismo el que utilizó años más tarde Albert Einstein para desarrollar su teoría general de la relatividad.

En algún momento de su carrera, Poincaré estudió a fondo los escritos de Lobachevski. El uso de la geometría hiperbólica en sus estudios sobre las ecuaciones diferenciales fue una de sus aportaciones más originales.

TOPOLOGÍA

La topología estudia la forma de los objetos de manera menos restrictiva que la geometría. Un modo sencillo de visualizar la equivalencia topológica es pensar en un trozo de masa de hacer pizzas. Podemos deformar la masa para hacer un triángulo, un cuadrado, un polígono cualquiera o una pizza circular. Mientras no cortemos la masa y no le hagamos agujeros, todas las figuras que obtengamos serán equivalentes para un topólogo, aunque no lo sean para un geómetra. ¿Qué caracteriza a estos objetos? ¿Qué tienen en común que los defina? En el caso de la masa de pizza que puede adquirir distintas formas, y a la que no hemos hecho agujeros, hay dos propiedades que saltan a la vista. La primera es que el contorno de la pizza define un adentro, donde hay masa, y un afuera, la mesa de trabajo sin pizza. Otra propiedad es que toda la masa está conectada entre sí. Usando un ejemplo muy querido de los matemáticos: una hormiga que se paseara por la pizza podría recorrerla toda ella sin tener que saltar o dar rodeos. Pues bien, la topología se encarga de este tipo de propiedades, más generales que las propiedades geométricas de los objetos, pero también más sutiles.

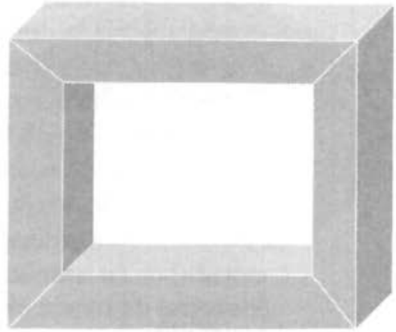
El primer resultado que nos interesa aquí lo obtuvo Leonhard Euler. El matemático suizo encontró que el número de caras C, aristas A y vértices V de un poliedro cualquiera estaban relacionados por la fórmula

$$C-A+V=2.$$

Por ejemplo, para un tetraedro, C vale 4, A vale 6 y V vale 4, cumpliéndose la fórmula de Euler. Para un cubo, tenemos $C=6$,

$A = 12$ y $V = 8$. Para un objeto más complejo, como el dodecaedro, formado por doce pentágonos regulares que forman una especie de balón de fútbol irregular, tenemos $C = 12$, $A = 30$ y $V = 20$. El lector puede comprobar que la fórmula se cumple para cualquier poliedro, regular o irregular, que imagine.

FIG. 5



El también suizo Simon L'Huilier (1750-1840) se interesó por la fórmula de Euler y se dio cuenta de que había figuras geométricas que no la cumplían. Imaginemos, por ejemplo, el marco de un cuadro como el de la figura 5. Tiene 16 caras, 32 aristas y 16 vértices, luego

$$C - A + V = 0.$$

Lo que distingue al cubo o al poliedro de esta nueva figura geométrica es que el marco tiene un agujero. L'Huilier se dio cuenta de que la fórmula de Euler se podía generalizar a un objeto con un número cualquiera de agujeros g de la siguiente forma:

$$C - A + V = 2 - 2g.$$

Retomemos nuestra masa de pizza e imaginemos que hacemos con ella una bola. Podemos deformar esta bola, sin cortarla ni hacerle agujeros, hasta obtener cualquier poliedro que queramos: un cubo, un tetraedro, un icosaedro, etc. Todos estos objetos cumplen la ecuación de Euler y a todos les corresponde el mismo valor de g ($g = 0$). Todos estos objetos, que se obtienen unos de otros por deformación continua, sin cortar ni pegar nada, son topológicamente equivalentes. El número g (o género de la figura) es lo que los matemáticos denominan un «invariante topológico» y todos los objetos que podemos obtener por deformación de una esfera, la bola de la masa de pizza, tienen $g = 0$.

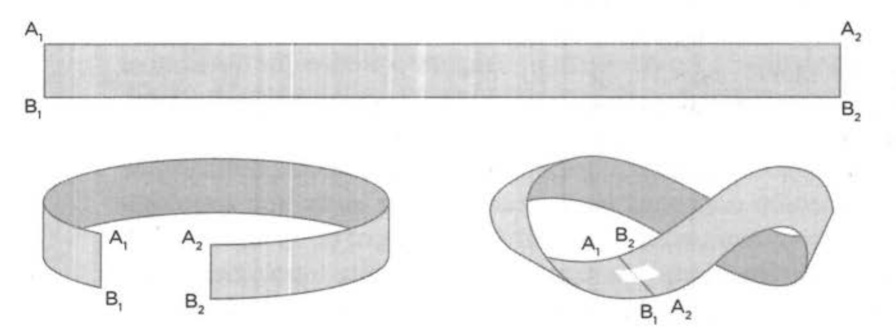
Hagamos ahora un agujero en nuestro trozo de masa y démosle la forma de una rosca. Los matemáticos llaman a esta forma un «toro». Podemos deformar el toro continuamente hasta obtener toda clase de poliedros, como el marco de un cuadro, y todos ellos tendrán un número $g=1$. Así, todos estos objetos son topológicamente equivalentes a un toro. Si hacemos dos agujeros tendremos objetos con $g=2$, si tres, $g=3$, y así sucesivamente.

Un alumno de Gauss, Johann Listing (1808-1882), fue el primer matemático en utilizar el término «topología» (del griego *topos*, «lugar») en su tratado *Lecciones de topología*. Listing introdujo el concepto de banda de Möbius antes que el propio August Möbius (1790-1868), que también era alumno de Gauss y que estudiaría las características de este objeto. La banda de Möbius se obtiene al pegar los extremos de una cinta que hemos doblado previamente (figura 6).

Si en una cinta normal podemos definir los dos lados de manera independiente (por ejemplo, podemos poner la cinta horizontalmente y distinguir entre el lado de arriba y el de abajo), en una banda de Möbius tal distinción no existe, porque al recorrer la superficie de la cinta, al cabo de una vuelta la parte de arriba se convierte en la de abajo y viceversa. Möbius llamó a este tipo de superficie «no orientable», porque no es posible definir una dirección sobre la superficie de manera no ambigua. En una esfera, que sí es una superficie orientable, puede establecerse un criterio cla-

Procedimiento para construir la banda de Möbius con una cinta.

FIG. 6



ro para asignar una orientación en todos los puntos. Por ejemplo, puede definirse en cada punto de la esfera la dirección hacia afuera como positiva, y negativa, la dirección hacia adentro. Al recorrer toda la superficie, la dirección positiva se mantiene consistentemente de manera continua. En una banda de Möbius, como la de la figura 7, no hay manera de hacer esta asignación de manera consistente, porque al recorrer la cinta lo que era positivo en un principio coincide, al cabo de una vuelta, con lo definido como negativo previamente.

De esta forma, a mediados del siglo XIX Listing y sus colegas habían llegado a la conclusión de que existían dos familias de superficies desde el punto de vista topológico: las orientables y las no orientables. La superficie orientable, finita y sin fronteras más sencilla es la esfera, con $g=0$. Pegando a la esfera g asas se consiguen todas las superficies orientables con g agujeros. De manera similar pueden conseguirse todas las superficies no orientables partiendo de la más sencilla y añadiendo asas. Un ejemplo muy conocido y singular de superficie no orientable con $g=1$ es la botella de Klein, que se muestra en la figura 8.

FIG. 7

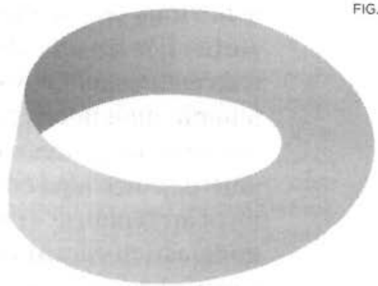


FIG. 8



Una cinta o banda de Möbius (fig. 7) y una botella de Klein (fig. 8).

Poincaré trabajó en casi todos los campos de las matemáticas y de la física de su época. Es muy difícil decidir si alguno de sus trabajos tuvo más importancia que los otros, porque son muchos los que fueron importantes en su momento y su nombre está asociado a numerosos teoremas y conceptos matemáticos. Pero el discurrir de las matemáticas durante el siglo XX y los primeros años

del siglo XXI ha llevado a que el nombre de Poincaré sea conocido sobre todo por estar asociado a la denominada «conjetura de Poincaré». Los mejores matemáticos del mundo dedicaron años de trabajo a esta hipótesis y su demostración final fue un acontecimiento tanto intelectual como periodístico. Dedicaremos un capítulo entero a los hallazgos de Poincaré en el ámbito de la topología, pero dejemos aquí enunciada, de manera sencilla, la conjetura que lleva su nombre: «Toda superficie orientable de n dimensiones, finita, sin fronteras y sin agujeros, se puede deformar de manera continua hasta convertirla en una n-esfera».

FÍSICA MATEMÁTICA

Henri Poincaré no solo fue un gran matemático, también fue un gran físico teórico. Aparte de la mecánica celeste, que en Francia era considerada una rama de las matemáticas, el otro gran foco de interés de Poincaré en el ámbito de la física fue el electromagnetismo. A mediados del siglo XIX las teorías del electromagnetismo estaban en una encrucijada. Gracias a la obra de Ampère, Faraday y otros físicos de la época, se había acumulado una serie importante de datos y leyes experimentales que habían demostrado la íntima relación existente entre la electricidad y el magnetismo, puesto que este último era consecuencia del movimiento de las cargas eléctricas.

El físico francés André-Marie Ampère (1775-1836), haciendo gala de una genial intuición, postuló que las fuerzas magnéticas que producían los imanes tenían su origen en corrientes eléctricas microscópicas que residían en el interior de los imanes. Con ello se reducía la fuente de las fuerzas tanto eléctricas como magnéticas a las cargas eléctricas. Las cargas estáticas producían fuerzas eléctricas y si se movían producían, además, fuerzas magnéticas. En estas circunstancias Michael Faraday (1791-1867) hizo uno de sus grandes descubrimientos: la inducción electromagnética. Faraday demostró experimentalmente que un imán podía inducir corriente eléctrica en un conductor cercano. Para que ello fuera posible había que mover algo: o bien mover el imán, o bien mover

HERTZ, MARCONI Y LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Heinrich Hertz (1857-1894) realizó entre 1886 y 1888 una serie de experimentos que revelaron de forma inequívoca la existencia de las ondas electromagnéticas, predichas por la teoría de Maxwell. Hertz fue capaz de generar y recibir ondas de unos 30 MHz (la unidad de frecuencia del sistema internacional, el hercio, debe su nombra a este científico alemán). Hertz realizó sus experimentos con un interés puramente científico, pero no pasó mucho tiempo hasta que otros científicos encontraran en las ondas de Hertz una aplicación práctica. De entre todos ellos destacó el italiano Guglielmo Marconi (1874-1937), que en diciembre de 1902 consiguió establecer una comunicación telegráfica por radio entre Inglaterra y Canadá. Marconi obtuvo el premio Nobel de Física en 1909. La multitud de problemas teóricos y prácticos a que dieron lugar las ondas electromagnéticas fueron del interés de ingenieros y científicos de la época, y, cómo no, objeto de estudio por parte de Poincaré.



Heinrich Rudolf Hertz en un grabado de 1894.



Retrato de Guglielmo Marconi en 1902.

el conductor. La corriente aparecía siempre que hubiera un movimiento relativo entre el imán y el conductor.

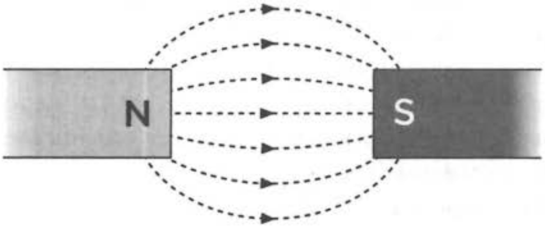
En su momento, estos fenómenos recibían dos explicaciones diferentes: la basada en la existencia de una acción a distancia y

la que abogaba por una teoría de campos. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), en Alemania, había propuesto una fórmula para explicar todas las fuerzas eléctricas y magnéticas, tanto estáticas como dinámicas, a partir de una acción a distancia entre las cargas eléctricas. Su fórmula era similar a la de la fuerza de gravedad entre dos cuerpos, pero con más términos, que dependían de la velocidad y la aceleración de las partículas. Con esta fórmula, Weber podía deducir las fuerzas entre cargas eléctricas, las fuerzas magnéticas entre dos corrientes eléctricas y las leyes de la inducción electromagnética descubiertas por Faraday. Aunque la fórmula de Weber explicaba correctamente todos los fenómenos electromagnéticos conocidos en su época, no estaba exenta de dificultades teóricas. Hermann von Helmholtz (1821-1894) demostró en torno a 1870 que la fórmula de Weber era inconsistente con la ley de conservación de la energía.

La teoría de campos había nacido con Faraday. Faraday imaginaba que el espacio alrededor de un imán estaba lleno de cuerdas invisibles, «líneas de fuerza» las llamaba él, cuya tensión era la responsable de las fuerzas de atracción o repulsión entre los polos. También imaginaba líneas de fuerza eléctricas que unían las cargas negativas con las positivas, provocando su atracción (figura 9). Aunque Faraday fue un gran experimentador, quizá el más grande de la historia de la ciencia, no tenía una formación matemática más allá de los fundamentos esenciales de álgebra y geometría. Fue el escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) quien formuló matemáticamente las ideas de Faraday.

Maxwell creó una teoría matemática unificada de todas las leyes de la electricidad y el magnetismo conocidas en su época.

FIG. 9



Líneas de campo entre imanes.

La teoría de Maxwell era inicialmente una teoría mecánica. Suponía que todo ocurría en un medio continuo, el éter, que lo llenaba todo. Este medio era una especie de fluido que podía moverse, pero que también se podía estirar y comprimir. Tenía, por tanto, inercia y elasticidad. Las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético no eran otra cosa que las ecuaciones mecánicas del movimiento del éter. Los fenómenos eléctricos eran consecuencia de que el éter se estiraba o se comprimía. Los fenómenos magnéticos resultaban del movimiento, en forma de remolinos, del éter. Para Maxwell, siguiendo las intuiciones de Faraday, la fuerza entre dos cuerpos cargados eléctricamente se comunicaba a través del éter, un poco en la forma en que una goma elástica comunica una fuerza entre sus dos extremos. La fuerza entre dos imanes era debida a la interacción entre los remolinos de éter que se formaban en la línea que unía los dos imanes, como si entre ellos existiera una especie de tornado, invisible para nosotros.

Pero la teoría de Maxwell iba un poco más lejos que la de Weber. No solo podía dar cuenta de los fenómenos conocidos más relevantes, sino que hacía una predicción: el éter podía transmitir ondas, de manera similar a como un sólido puede transmitir vibraciones. Maxwell calculó la velocidad que tendrían esas ondas y encontró un valor cercano al de la velocidad de la luz. En sus propias palabras: «No podemos dejar de concluir que la luz consiste en las ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos».

Fue el discípulo de Helmholtz, Heinrich Hertz, quien inclinó definitivamente la balanza a favor de la teoría de Maxwell. Hertz fue capaz de producir ondas electromagnéticas de una longitud de onda muy diferente a la de la luz, y demostró que esas ondas tenían las mismas propiedades que la luz: se propagaban a la misma velocidad, viajaban en línea recta, se reflejaban y, como la luz, podían polarizarse. El descubrimiento de Hertz causó una gran impresión en la comunidad científica de la época y tuvo repercusiones de dos tipos: teóricas, impulsando el estudio del electromagnetismo dentro de la física, y tecnológicas, con la aparición de la telegrafía sin hilos. A ambos aspectos iba Poincaré a dedicar su atención en sus años de madurez científica.

Pero la teoría de Maxwell también tenía sus dificultades. Al ser una teoría puramente de campos no podía explicar de modo consistente algunos fenómenos que mostraban la existencia de partículas cargadas, como la electrolisis o los rayos catódicos. Y había un problema aún mayor: la teoría parecía requerir un medio especial, el éter, cuya dinámica era la causa de todos los fenómenos electromagnéticos. Cabía entonces preguntarse si había un sistema de referencia privilegiado, aquel en que el éter estaba en reposo, para las leyes del electromagnetismo. El mismo Hertz estuvo entre los primeros en intentar elaborar una teoría de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

«El pensamiento no es más que un relámpago en medio de una larga noche. Pero ese relámpago lo es todo.»

— Henri Poincaré.

Fue el holandés Hendrik Lorentz (1853-1928) quien realizó la síntesis definitiva entre las ideas de Maxwell y las de Weber. Lorentz admitía la existencia de flujos de partículas cargadas, a la manera de Weber, pero mantenía la existencia del campo como medio de interacción entre las cargas, en lugar de la acción a distancia de Weber. Este proceder aseguraba los éxitos de la teoría de Maxwell, pero además añadía una comprensión plausible de la electrolisis y las descargas eléctricas en gases. Con Lorentz, la teoría electromagnética adquirió la forma aceptada hoy en día: los campos obedecen las ecuaciones de Maxwell, y las partículas, las leyes de la mecánica.

La teoría de Lorentz, bien establecida a finales del siglo XIX, resolvía muchas contradicciones anteriores, pero creaba problemas nuevos. Poincaré fue uno de los mayores admiradores de Lorentz, y también su crítico más perspicaz. En 1902, en su libro *Ciencia e hipótesis*, acerca de la situación de la electrodinámica, Poincaré escribió: «Lo más satisfactorio que tenemos es la teoría de Lorentz. [...] Sin embargo, tiene todavía un defecto grave, [...] es contraria al principio de acción y reacción; o mejor, ese principio, a los ojos de Lorentz, no sería aplicable a la materia sola».

Estos puntos débiles de la teoría de Lorentz llevarían a reformular, no el electromagnetismo, sino las leyes de la mecánica, dando lugar al nacimiento de la teoría especial de la relatividad. Poincaré fue protagonista, en primer plano, de esta primera revolución de la física del siglo XX.

LOS RASGOS DEL GENIO

¿Con qué armas se enfrentó Poincaré a estos desafíos? Dos biógrafos que le conocieron muy de cerca nos aportan datos y anécdotas. Uno es, como ya se ha apuntado, Paul Appell. El otro es Jean Gaston Darboux (1842-1917), que escribió una biografía de Poincaré poco después de la muerte de este. Según ambos biógrafos, Poincaré era un gran lector y retenía con facilidad cuanto leía. Como era miope no veía bien la pizarra, por lo que desarrolló una especie de memoria auditiva que le hacía recordar la lección sin tomar notas. Aun no siendo buen dibujante, sí tenía una gran capacidad para la imaginación espacial, una poderosa visión interior, que le permitió adentrarse en las profundidades de la geometría y la topología.

Cuando algún problema le interesaba, se abstraía totalmente, mostrando algunos rasgos de los que tópicamente se atribuyen a los sabios: nada parecía importarle e incluso a veces se olvidaba de comer. Era capaz de hacer sus cálculos mentalmente, mientras paseaba de un lado para otro, y solo acudía al papel cuando ya tenía claro qué había que hacer.

Era un hombre impaciente y escribía con rapidez. Una vez que había comprendido o resuelto un problema se ponía a escribir de corrido la solución, sin apenas releer y repasar lo que había escrito. Esa forma de trabajar, que sería una característica suya durante casi toda su vida, le trajo más de un disgusto, no solo en su época de estudiante, en la que su apresuramiento le costó alguna vez no alcanzar la máxima calificación, sino también en su vida científica, donde en alguno de sus artículos cometió errores importantes. Este rasgo de su personalidad también quedó reflejado

en sus cartas, una buena parte de las cuales están disponibles en internet gracias a la Universidad de Lorena (aunque debe tenerse en cuenta que su letra no es de fácil lectura y la escritura parece realizada a toda prisa).

Poincaré no destacaba por sus habilidades físicas y era bastante incompetente en gimnasia, a pesar de lo cual, y sorprendentemente, era buen bailarín. Le interesaba la música, pero no parece que tuviera especiales dotes para interpretarla y no tocaba ningún instrumento. Desde muy pequeño sí se reveló como un buen escritor, y escribía obras de teatro que representaban sus familiares y amigos. Por otra parte, Poincaré no era hábil con las manos ni tenía dotes para el laboratorio. Siempre valoró y se interesó por la física experimental, pero nunca realizó ningún experimento original.

Pero, sobre todo, Poincaré siempre destacó por su gran inteligencia. Desde pequeño era capaz de resolver los problemas más difíciles. Durante el bachillerato y la preparación para el *concours* asombraba a sus compañeros por la facilidad y rapidez con que resolvía las cuestiones que se le proponían. Incluso hubo quien, para probarlo, le propuso un problema muy por encima del nivel exigido, que resolvió sin aparente dificultad. En un primer contacto, su ensimismamiento podía provocar la impresión de que era un joven estirado, pero pronto se hacía apreciar por sus compañeros, ya que siempre estaba dispuesto a ayudar a los demás cuando se atascaban en algún problema y era, en general, un buen camarada.

Todas estas cualidades se pusieron de manifiesto cuando Henri Poincaré ingresó en la École Polytechnique en 1873.

CAPÍTULO 2

Un genio se presenta

Poincaré se dio a conocer en el panorama europeo de las matemáticas apenas comenzada su carrera académica. Sus primeras publicaciones estuvieron dedicadas a las ecuaciones diferenciales, tema en el que la potente escuela alemana de la época, con Klein a la cabeza, era pionera. Sus trabajos pronto le valieron el reconocimiento tanto dentro como fuera de su país, y también dieron lugar a alguna que otra controversia sobre la prioridad de los descubrimientos realizados.

En otoño de 1873 Poincaré y Appell se fueron a vivir a París. El primero como alumno de la École Polytechnique y el segundo para ingresar en la École Normale Supérieure. La École Polytechnique fue fundada en 1794, durante la Revolución francesa, y era una institución militar, condición que mantuvo hasta 1970. Sus alumnos vestían uniforme y, junto con los estudios propios de un centro de enseñanza superior, recibían instrucción militar y tenían obligaciones propias del ejército. Era, y sigue siendo, un centro muy selectivo, al que solo acudían los mejores estudiantes del país y en el que daban clase los mejores profesores. Una idea de este ambiente selecto la da el hecho de que Charles Hermite y Pierre Bonnet (1819-1892) estaban entre sus profesores. Y cuando Hermite cayó enfermo en una ocasión le sustituyó Edmond Laguerre (1834-1886). Como puede verse por la categoría de sus profesores, las matemáticas estaban consideradas como uno de los pilares de una buena educación técnica.

Durante su estancia en la École Polytechnique Poincaré escribía con frecuencia a su madre, por lo que se dispone de un archivo extenso sobre su estado de ánimo y las peripecias que vivió en aquella época. Las cartas reflejan la total confianza entre madre e hijo. Poincaré no ocultaba nada a su madre y le hacía partícipe tanto de sus progresos como de sus contratiempos. Describía la escuela como un internado con disciplina militar en el que los

CHARLES HERMITE (1822-1901)



Hermite fue una de las figuras más importantes de las matemáticas francesas del siglo XIX. Especialmente dotado para las matemáticas, no lo estaba para los exámenes y tuvo muchas dificultades en conseguir superar las sucesivas pruebas a las que se sometió durante su adolescencia y juventud. Solo gracias al apoyo de algunos de sus profesores, que veían en él sus indiscutibles aptitudes, fue capaz de superar sus exámenes en el liceo, donde ya leía a Gauss pero tenía problemas con las matemáticas elementales. Ingresó en la École Polytechnique, aunque había obtenido el puesto número 68 en el examen de ingreso. Como padecía una cojera de nacimiento, fue dado por no apto un año después de ingresar en esta escuela, la cual tenía un fuerte componente militar con el que Hermite no podía cumplir. Gracias a la ayuda de los matemáticos Sturm y Bertrand, con cuya hermana Louise se casó, consiguió el certificado necesario para dedicarse a la enseñanza, y en 1848 fue nombrado examinador, precisamente, de la École Polytechnique. Fue allí donde conoció, como alumno, a Poincaré. Hermite fue un matemático de gran originalidad y entre sus mayores hallazgos están la solución general de la ecuación de quinto grado o la demostración de la trascendencia del número *e* (esto es, *e* no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros). Hermite llegó a tener gran influencia en el mundo académico francés de finales del siglo XIX y apoyó sin reservas a Paul Appell (quien se casó con una sobrina de su esposa), a Émile Picard (su yerno) y a Henri Poincaré.

arrestos se sucedían tras alguna que otra gamberrada por parte de los internos. La competencia por ser el número uno de la promoción era muy fuerte, y Poincaré daba cuenta a su madre no solo de las notas que obtenía en sus exámenes sino también de las que obtenían sus máximos competidores. Al final del año una pequeña dificultad en un examen de geometría hizo que Poincaré obtuviera menos puntos que sus contrincantes. El examinador le dio solo 10 sobre 20 en uno de los exámenes. Poincaré fue a quejarse a Pierre Bonnet, el director de estudios, que comprendió que Poincaré no

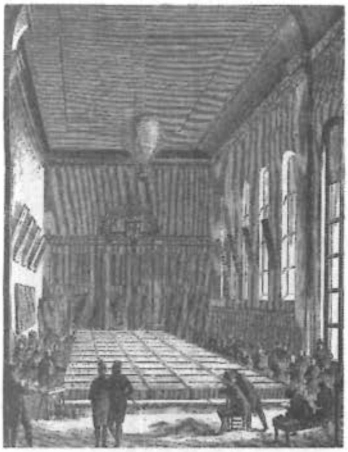
había sido puntuado justamente, pero no corrigió a su colega. Poincaré tenía problemas con el dibujo y el examinador fue especialmente duro en ese aspecto. Finalmente, quedó en segunda posición, detrás de un tal Bonnefoy y por delante de otro estudiante de apellido Petitdidier. Los tres acapararían las tres primeras posiciones durante los años que estudiaron juntos.

En 1874 Henri Poincaré publicó su primer trabajo original en matemáticas: «*Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface*» («Nueva demostración de las propiedades de la indicatriz de una superficie») en la revista especializada *Nouvelles annales de mathématiques*. No era un trabajo de especial relevancia, pero demostraba que ya desde muy joven era capaz de hacer aportaciones originales. Durante su segundo y último año en la politécnica Poincaré tuvo algunos momentos de desaliento. La constante competencia por ser el número uno produjo en él cierta desazón. En alguna de sus cartas a su madre se mostraba inseguro y daba la sensación de sentirse incapaz de seguir rindiendo al mismo nivel. En cualquier caso, acabó el segundo año igual que el primero: en segunda posición, por detrás de Bonnefoy.

Pasados los dos años en la politécnica llegó el momento de seguir unos estudios más especializados. Tanto Poincaré como sus dos máximos competidores, Bonnefoy y Petitdidier, se decidieron por seguir sus estudios en la Escuela de Minas de París. Los ingenieros de minas pertenecían a un cuerpo de funcionarios del Estado que estaba muy bien considerado y realizar esta carrera aseguraba a los estudiantes un buen futuro profesional. Y, aunque el interés fundamental de Poincaré seguían siendo las matemáticas, sabía que los estudios de ingeniería de minas le proporcionarían un buen trabajo. Durante los tres cursos en la Escuela de Minas Poincaré mantuvo el contacto con Bonnet, su profesor en la politécnica. Con su consejo siguió estudiando matemáticas por su cuenta y en agosto de 1876 se examinó con éxito de matemáticas en la Universidad de la Sorbona.

En 1878 Poincaré terminó sus estudios en la Escuela de Minas. Habiendo perdido el interés por competir para ser el número uno del ranking, quedó tercero en la evaluación final, por detrás de Bonnefoy y Petitdidier. El cuerpo de ingenieros de minas dependía

LA ÉCOLE POLYTECHNIQUE



Grabado que ilustra la gran pila voltaica construida en 1813 en la École Polytechnique por orden de Napoleón I.

La École Polytechnique forma parte de las Grandes Écoles francesas, instituciones de enseñanza superior que funcionan de manera autónoma al sistema universitario y que forman a una buena parte de la élite intelectual y científica de Francia. Se accede a ellas a través de una prueba especialmente difícil, el *concours*, para la que los alumnos más brillantes se preparan una vez terminado el bachillerato. La École Polytechnique fue fundada en 1794 por el gobierno revolucionario francés, a instancias del matemático Gaspard Monge (1746-1818), casi al mismo tiempo que la École Normale Supérieure, otra de las grandes escuelas francesas. La intención de los creadores de estas instituciones era la de formar ingenieros, científicos y profesores de alto nivel para servir a la nación. En consonancia con el espíritu revolucionario, se accedía a ellas a través de un duro examen de selección al que podían presentarse todos los jóvenes franceses, independientemente de su clase social o sus recursos económicos. Una vez admitidos en las escuelas los jóvenes alumnos tenían asegurado un alojamiento, manutención y un salario. En 1805 Napoleón dio a la École Polytechnique un estatus militar, que la institución mantiene hasta hoy, puesto que depende del Ministerio de Defensa, si bien desde 1970 se rige por un estatuto civil. Desde mediados del siglo XIX, el distintivo de la escuela es una X, cuyo origen es incierto, pues algunos la asocian con dos cañones cruzados y otros con la incógnita matemática. A los alumnos que han estudiado en ella se les asigna una X seguida del año en que ingresaron en la escuela. Así, a Henri Poincaré le correspondió la X1873. En la École Polytechnique estudiaron muchos ilustres franceses como Henri Becquerel (X1872), André Citröen (X1898), el premio Nobel de Economía Maurice Allais (X1931) o el presidente de la República, Valéry Giscard d'Estaing (X1944), por citar solo algunos.

directamente del Gobierno, que asignaba los puestos vacantes a los recién graduados, normalmente por orden de preferencia según el ranking. Los puestos disponibles estaban en las localidades de Clermont-Ferrand, Vesoul —ciudad próxima a Nancy—, Angers y

Bône, en el norte de Argelia. Aunque inicialmente a Bonnefoy se le había asignado Clermont-Ferrand, este escribió a las autoridades mostrando su preferencia por Vesoul. Ante la posibilidad de que su hijo fuera destinado a Argelia, el padre de Poincaré hizo uso de ciertas amistades en el Ministerio de Obras Públicas, del que dependía la asignación, para que se informara al ministro de que Poincaré no gozaba de muy buena salud y que además estaba preparando su tesis doctoral en la Sorbona. También envió al ministerio un informe médico en el que se decía que Poincaré era delicado de constitución y que una larga estancia en Argelia podía ser perjudicial para su salud.

Finalmente, el 28 de marzo de 1879 Poincaré fue designado como ingeniero de minas de tercera clase en Vesoul. Bonnefoy fue asignado a Clermont-Ferrand y Petitdidier a Angers. Otro ingeniero, Roche, fue enviado a Argelia. Desgraciadamente, Bonnefoy murió poco después en una explosión en la mina. Petitdidier tenía muy mala salud y murió de bronquitis en 1884. Por último Roche murió en un ataque de los tuaregs en febrero de 1881.

Mientras terminaba sus estudios en la Escuela de Minas, Poincaré escribió su tesis doctoral en matemáticas, que tuvo por título «Las propiedades de las funciones definidas por ecuaciones en derivadas parciales». La memoria fue depositada a principios del año 1878 y no fue hasta agosto de 1879 que fue aceptada. Los tres miembros del tribunal examinador, los matemáticos Jean Gaston Darboux, Edmond Laguerre y Pierre Bonnet, su profesor en la politécnica, tuvieron bastantes dificultades en evaluar la memoria y exigieron numerosas correcciones a su autor. El estilo de Poincaré era demasiado directo y había muchos puntos que no estaban explicados en detalle. En cualquier caso, como todo lo que Poincaré emprendería a partir de entonces, el trabajo habría nuevos caminos y contenía muchos resultados originales e interesantes.

El 3 de abril de 1879 Poincaré se incorporó a su puesto de ingeniero en las minas de Ronchamp, a 30 km de Vesoul y no muy lejos de su ciudad natal, Nancy. Trabajó como ingeniero de minas solo unos pocos meses, porque a principios de diciembre se incorporó como profesor de Matemáticas en Caen. El acontecimiento más relevante, y dramático, del paso de Poincaré por las minas

tuvo lugar el 1 de septiembre de 1879, cuando dieciséis mineros murieron en una explosión en el pozo Magny. El pozo había sido construido un año antes, se encontraba a 694 m de profundidad y era el más profundo de Francia por aquel entonces. Poincaré fue el encargado de investigar las causas del accidente y, como tal, tuvo que descender al fondo del pozo.

UN INFORME

El resultado de sus pesquisas fue un extenso informe en el cual se proponía reformar el sistema de ventilación de la mina. Poincaré reflejó en su escrito la magnitud de la tragedia: «Era desafortunadamente muy cierto que no encontraríamos nada más que cadáveres, y el estado de las primeras víctimas que descubrimos no dejaba dudas a este respecto». La causa del accidente fue una lámpara que había sido dañada por un error humano:

> Sospechamos que la lámpara 476 que fue encontrada en aquel lugar fue la causa de la ignición del gas y del desastre. El estado de la lámpara confirma radicalmente estas sospechas. De hecho, la fractura que podemos ver en el fondo del cilindro metálico es muy clara y su forma, así como sus dimensiones, nos recuerda la sección de la piqueta que usan los trabajadores. [...] No encontramos ningún derrumbamiento en los alrededores que nos hiciera suponer que el agujero había sido producido por el golpe de una piedra caída del techo.

El hecho de que una lámpara en malas condiciones causara la tragedia quedaría grabado en la mente del joven ingeniero durante toda su vida. Se trataba de una lámpara de Davy, un tipo de lámpara de queroseno inventada en 1815 por el químico inglés sir Humphry Davy (1778-1829). La lámpara de Davy protegía la llama con una malla metálica, lo que evitaba su propagación en caso de contacto con el gas grisú, con frecuencia presente en las minas de carbón.

Muchos años más tarde, en 1910, Poincaré escribió un artículo divulgativo sobre las minas de carbón para la revista *Au seuil de la vie* («En el umbral de la vida»). Esta revista iba dirigida a los niños y de los capítulos que Poincaré escribió para ella el editor publicó un libro titulado *Ce que disent les choses* («Lo que dicen las cosas»). Probablemente recordando el desgraciado incidente del pozo Magny, Poincaré hacía hincapié en la utilidad de la lámpara de Davy y su funcionamiento, describiendo la explosión de grisú del siguiente modo:

> Hay una mezcla explosiva de gas grisú y aire que llena toda la atmósfera de la mina e incluso los pulmones de los trabajadores. Solo se necesita una chispa para incendiar la mezcla, y desisto de tratar de describir el horror que sigue: cientos de desafortunados hombres muertos instantáneamente por la explosión, mientras que otros, aún más desgraciados, horrorosamente quemados y sobreviviendo por unas pocas horas o unos pocos días; y otros, asfixiados por los productos de la combustión.

ECUACIONES DIFERENCIALES Y FUNCIONES AUTOMÓRFICAS

En diciembre de 1879 Poincaré consiguió una plaza de profesor de Cálculo Diferencial e Integral en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Caen. El sueldo que se le asignó era de 5500 francos anuales. Previamente, el 19 de noviembre de 1879, solicitó al Ministerio de Obras Públicas la correspondiente comisión de servicios para poder abandonar su puesto en Vesoul. Poincaré perteneció al cuerpo de minas toda su vida, aunque, eso sí, nunca volvió a ejercer como ingeniero. Aun así, se mantuvo siempre atento a las cuestiones mineras y su trabajo de divulgación en *Au seuil de la vie* demuestra un conocimiento extenso del mundo de las minas.

En Caen Poincaré conoció a la que se iba a convertir en su esposa, Louise Poulain d'Andecy. Los jóvenes se prometieron en febrero de 1881 y se casaron el 20 de abril de 1881. Tras la boda,

los novios disfrutaron de unas vacaciones de quince días. El matrimonio tuvo tres niñas y un niño.

«El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre.»

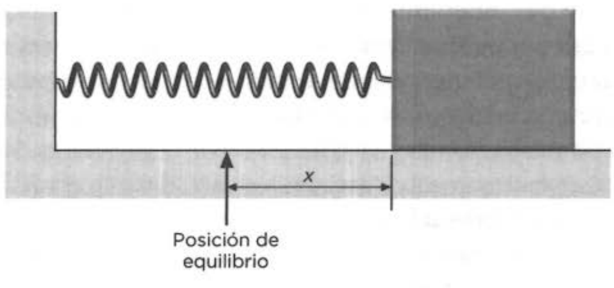
— Henri Poincaré.

El período que Poincaré vivió en Caen fue muy fructífero desde el punto de vista científico. Fue aquí donde elaboró varios de los conceptos sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias y empezó a trabajar sobre lo que él llamaba «funciones fuchsianas».

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, la Academia de Ciencias de París convocó en 1879 un premio para recompensar el mejor trabajo sobre ecuaciones diferenciales lineales. Una ecuación diferencial expresa una relación entre una función y sus derivadas. Por ejemplo, si tenemos un bloque sujetado a un muelle como el de la figura 1, la segunda ley de Newton se expresa diciendo que la fuerza ejercida sobre el bloque es igual a su masa por su aceleración: $F = ma$.

La fuerza es proporcional al desplazamiento del muelle respecto de su posición de equilibrio y se puede expresar por $F = -kx$. Aquí k es la constante del muelle; cuanto más grande sea k más costará estirar o comprimir el muelle. Si tiramos del bloque, el muelle se estira y ejerce una fuerza sobre el bloque intentando que vuelva a su posición de equilibrio. Si apretamos el bloque, comprimiendo el muelle, se produce una fuerza que intenta descompri-

FIG. 1



mirlo, intentando devolver de nuevo el muelle a su posición de equilibrio. Por su parte, la aceleración es el ritmo al que la velocidad cambia en el tiempo, esto es, la derivada en el tiempo de la velocidad. Y la velocidad es, a su vez, la derivada temporal de la posición, por lo que la ecuación se expresa del siguiente modo:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Supongamos, para simplificar, que la masa del bloque y la constante tienen valor unidad en las unidades escogidas. La ecuación se puede expresar entonces diciendo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Esto es una ecuación diferencial y el objetivo del matemático es encontrar la posición en cualquier instante de tiempo $x(t)$, en caso de que exista, que cumpla esta ecuación. La ecuación anterior es lineal, lo que significa que si hay dos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la suma $x_1(t) + x_2(t)$ es también una solución. Cualquiera de estas funciones multiplicadas por un número constante son asimismo solución.

En el caso del muelle, las soluciones de la ecuación son el seno y el coseno y cualquier combinación lineal de ellas, es decir, cualquier función de la forma $x(t) = a \cos t + b \cos t$. Las constantes a y b dependen de las condiciones iniciales. Por ejemplo, podemos tirar de la masa y soltarla desde un desplazamiento dado, o, darle un impulso desde su posición de equilibrio. El resultado, en cualquier caso, es que el bloque realiza un movimiento de oscilación alrededor del punto de equilibrio (figura 2, pág. siguiente). Se entiende que todo ello se produce en ausencia de rozamiento.

Las funciones seno y coseno tienen una propiedad muy importante: son periódicas. Esto significa que su valor vuelve a repetirse al cabo de un tiempo, llamado período. El período de las funciones seno y coseno es 2π; así, $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$. Este hecho lo podemos expresar gráficamente asociando a las funciones trigonométricas seno y coseno una serie de puntos sobre la recta, como vemos en la figura 3. La forma de la función dentro del seg-

FIG. 2

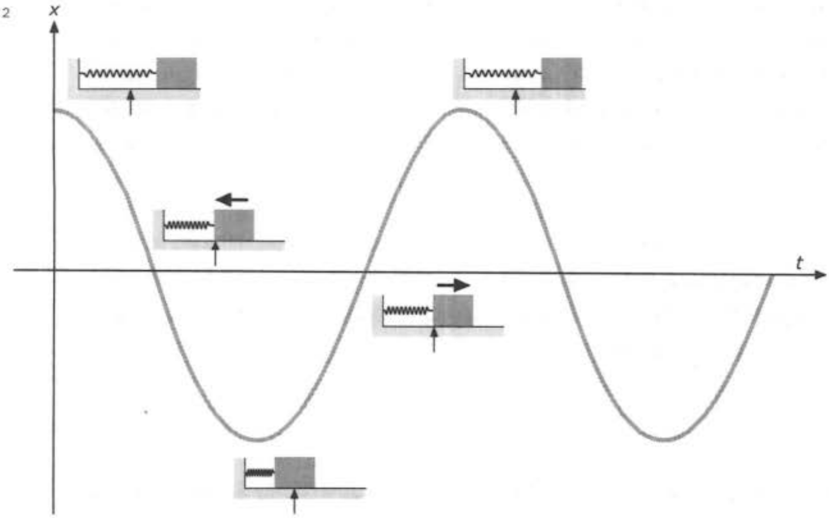
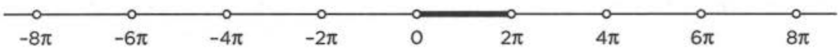


FIG. 3



mento $(0,2\pi)$ se repite en cada segmento $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, para cualquier valor de n.

La ecuación diferencial que corresponde al bloque ligado al muelle es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. Su solución era bien conocida por los matemáticos del siglo XIX, que de hecho sabían resolver ya ecuaciones bastante más difíciles. En concreto, se sabían resolver ciertas ecuaciones de la forma:

$$P(t)\frac{d^2x}{dt^2}+Q(t)\frac{dx}{dt}+R(t)x=0,$$

donde $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$, son funciones polinómicas conocidas de t. Pero se buscaba, si no una solución general, sí un marco teórico general.

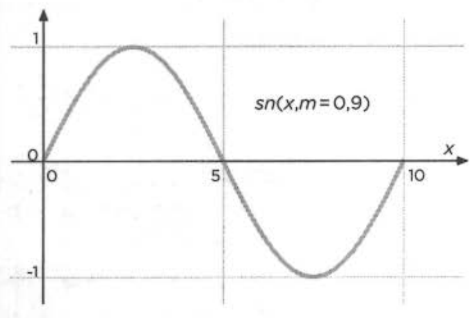
El 22 de marzo de 1880, estando ya en Caen, Poincaré presentó un primer trabajo al premio convocado por la academia. La

primera memoria fue seguida por tres apéndices, que Poincaré envió entre junio y diciembre del mismo año. Poincaré, inspirado por los trabajos del matemático alemán Lazarus Fuchs (1833-1902), consideró las singularidades de este tipo de ecuaciones (las singularidades son aquellos puntos en que los coeficientes se anulan).

Grandes matemáticos del siglo, especialmente en Alemania, trabajaron en este problema y otros relacionados, logrando significativos avances. El alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851) introdujo las funciones que hoy se conocen como «funciones elípticas de Jacobi». Estas funciones describen, entre otros, el movimiento de un péndulo que oscile con gran amplitud. El movimiento de un péndulo cuando las oscilaciones son de pequeña amplitud es bien conocido y se corresponde con el mismo movimiento descrito por el bloque unido al muelle. De hecho, la ecuación de un péndulo para oscilaciones pequeñas es la misma que la que hemos visto anteriormente, y el movimiento del péndulo viene descrito por funciones sinusoidales. Sin embargo, cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña (por ejemplo, si el péndulo se desplaza de la vertical un cuarto de vuelta), el comportamiento se desvía del sinusoidal, y la ecuación diferencial que lo describe tiene términos no lineales. Las funciones de Jacobi describen con exactitud este movimiento para una amplitud cualquiera, como por ejemplo la de la figura 4. Estas funciones dependen de un parámetro, m, que puede variar entre 0 y 1; para $m=0$ se tiene el caso particular de las funciones trigonométricas. Las funciones de Jacobi también sirven para describir las olas llamadas «cnoidales», cuya longitud de onda es muy larga en comparación con la profundidad del agua. La fotografía superior de la pág. 57 muestra una formación de este tipo de olas.

Función elíptica *sn*(*x*).

FIG. 4



Una propiedad importante de las funciones elípticas es que son doblemente periódicas. Pero esta doble periodicidad no se muestra si se las considera solo funciones de una variable real, sino cuando

se las considera funciones de variable compleja. Es decir, funciones de la forma $F(z)$ con $z = x + iy$, donde la letra i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Los números complejos z admiten una representación gráfica en un plano, en el que el eje de abscisas es el eje real x y el eje de ordenadas es el eje imaginario y.

En la figura 5 se muestra la red de periodicidad de las funciones elípticas en el plano complejo. De manera análoga a lo que ocurre con el seno o el coseno sobre la recta real, las funciones elípticas en cualquier rectángulo de esta red son una réplica de la función en el primer rectángulo. El también alemán Karl Weierstrass (1815-1897) definió lo que se conocen como «funciones elípticas de Weierstrass», que también poseen la doble periodicidad.

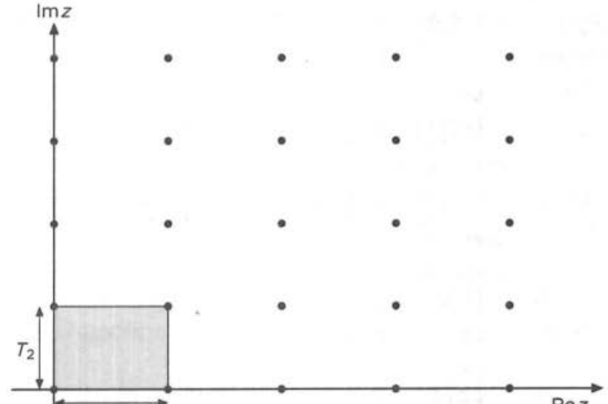
Poincaré se dio cuenta de que la resolución general de las ecuaciones diferenciales lineales pasaba por generalizar estos conceptos y considerar otro tipo de transformaciones, más allá de la simple periodicidad. Poincaré encontró que las funciones que eran invariantes ante transformaciones que tuvieran la siguiente forma

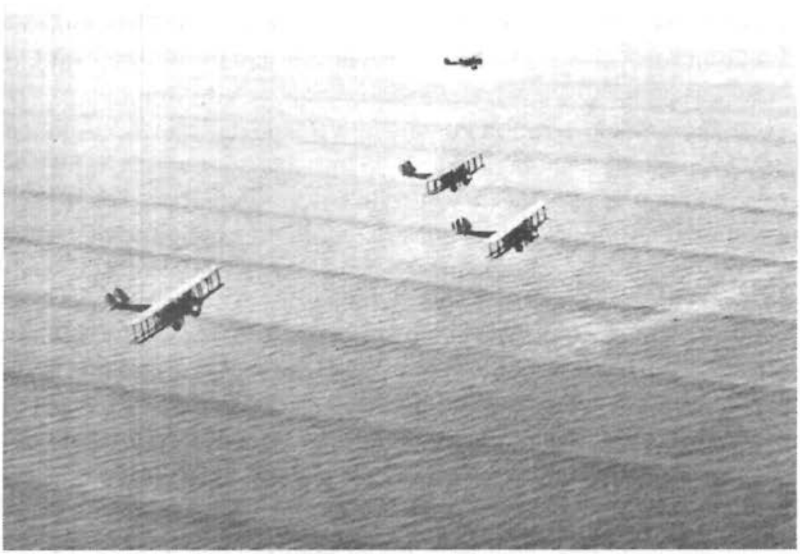
$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

permitían resolver un gran número de ecuaciones. En honor de Fuchs, cuyo trabajo admiraba, decidió llamar *fuchsianas* a estas

Retícula en el plano complejo.

FIG. 5





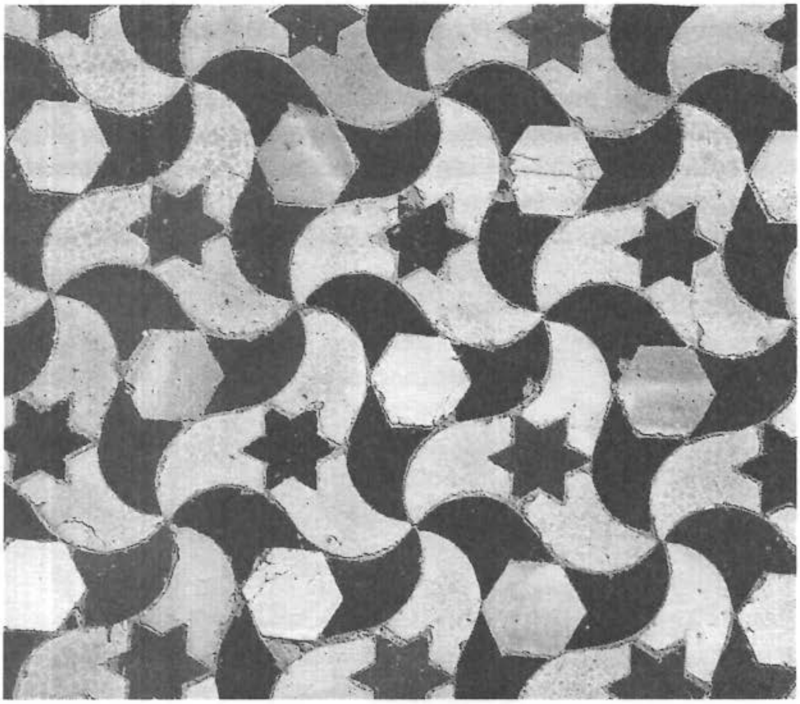


FOTO SUPERIOR:
Bombarderos estadounidenses sobrevuelan el océano cerca de Panamá en 1933. Las crestas de las olas están separadas por una gran distancia y el mar es casi plano entre ellas. Estas ondas se conocen como ondas cnoidales y se describen por las funciones elípticas de Jacobi *cn*(*x*).

FOTO INFERIOR:
Los azulejos de la Alhambra de Granada son un ejemplo de teselado triangular.

funciones. Pero halló una conexión aún más importante. Estas funciones definían una serie de polígonos que permitían hacer un teselado no uniforme de un disco.

RELLENANDO UN DISCO

Un teselado es un mosaico que rellena una superficie dada. Todos los días solemos ver un teselado uniforme del plano: el de la ducha de nuestro cuarto de baño. Los azulejos se disponen sobre la pared formando una red periódica. Puede variar el dibujo del motivo, pero, en el caso de los cuartos de baño o de la cocina de una casa, este se repite una y otra vez en las direcciones horizontal y vertical. La figura geométrica base en estos casos, en la que se inserta el motivo, es un cuadrado o un rectángulo. Los únicos polígonos regulares que cubren completamente una superficie plana son cuadrados, triángulos y hexágonos. El caso de los cuadrados es el que solemos ver en casa; el recubrimiento por hexágonos es el que usan las abejas para construir el panal y un magnífico ejemplo de teselado triangular lo encontramos en algunos azulejos de la Alhambra de Granada (véase la fotografía de la página anterior).

Pero puede ser interesante recubrir otras superficies. El matemático alemán Hermann Schwarz (1843-1921) estudió las formas

Teselados de Schwarz de la esfera.

FIG. 6

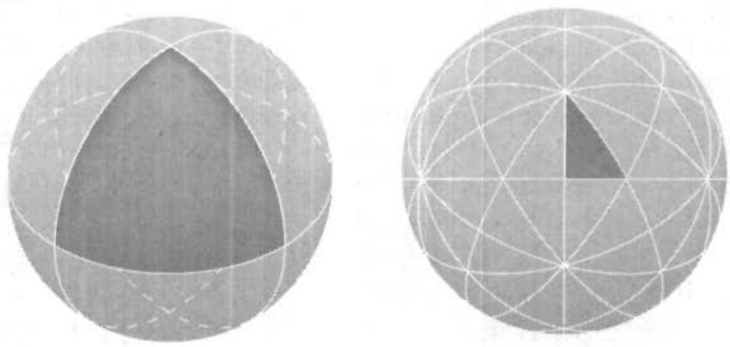


FIG. 7

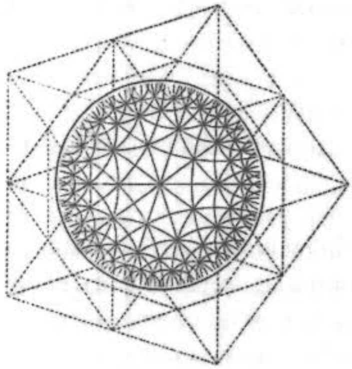
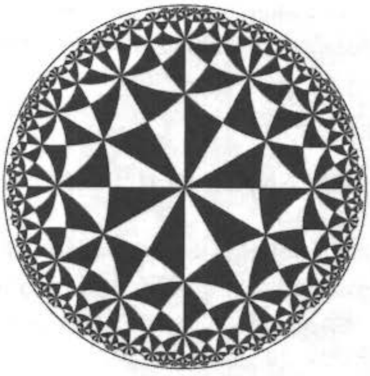


FIG. 8



Teselado de Schwarz del disco (fig. 7) y teselado de Poincaré del disco (fig. 8).

de recubrir una esfera y encontró que había varias maneras de hacerlo a base de triángulos esféricos. La figura 6 muestra dos ejemplos de teselados uniformes de la esfera a base de triángulos de Schwarz. Los triángulos esféricos que forman las teselas en estos recubrimientos son *congruentes*, es decir, tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Pero Schwarz encontró algo más: algunas funciones en el campo complejo estaban asociadas a teselados no uniformes de un disco, en forma análoga a como las funciones elípticas están asociadas al teselado uniforme del plano. La figura 7 muestra este teselado del disco.

Poincaré, que en el momento en que hizo este descubrimiento ignoraba los trabajos de Schwarz, halló que las funciones que él había llamado fuchsianas estaban asociadas a teselados no uniformes del disco como puede verse en la figura 8.

Y aquí llegó uno de sus grandes descubrimientos. En su libro *La ciencia y el método*, una reflexión sobre la forma en que se realizan los descubrimientos científicos, puede leerse el relato que él mismo hizo de su descubrimiento:

> Desde hacía quince días me esforzaba en demostrar que no podía existir ninguna función análoga a esas que luego llamé fuchsianas; en ese momento yo era completamente ignorante; todos los días me

FIG. 9



Límite circular I (1958), de M.C. Escher.

sentaba a mi mesa de trabajo, me pasaba así una o dos horas, probaba un gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una noche, me tomé un café solo, contrariamente a mi costumbre, y no pude dormir: las ideas aparecían locamente; las sentía como chocar, hasta que dos de ellas se aproximaban, por así decirlo, para formar una combinación estable. Por la mañana había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, aquellas que se derivan de la serie hipergeométrica; no tenía más que redactar los resultados, lo que solo me llevó algunas horas. A continuación quise representar estas funciones como cociente de dos series; esta idea era perfectamente consciente y reflexionada; la analogía con las funciones elípticas me guiaba. Me pregunté cuales debían ser las propiedades de estas series, si es que existían, y llegué sin dificultad a construir las series que llamé theta-fuchsianas.

En ese momento salí de Caen, donde vivía por entonces, para tomar parte en una excursión de geología organizada por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; al llegar a Coutances, nos montamos en un ómnibus para no sé qué paseo; en el momento en que puse el pie sobre el escalón, me vino la idea, sin que ninguno de mis pensamientos anteriores pareciera prepararme para ello, de que las transformaciones que yo había usado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclídea. No hice la verificación; no hubiera tenido el tiempo necesario, porque nada más sentarme en el ómnibus, retomé la conversación que estaba teniendo, pero tuve de repente una certidumbre completa. De vuelta a Caen, verifiqué el resultado con calma para mayor tranquilidad.

Lo que Poincaré había descubierto era que los triángulos que formaban su teselado del disco, y que no eran congruentes en la

geometría euclídea, porque tal y como puede verse en la figura 8 su tamaño va disminuyendo a medida que nos movemos hacia afuera, *sí eran congruentes* en la geometría no euclídea hiperbólica de Lobachevski. Era esta la primera vez en la historia de las matemáticas en la que los conceptos de la geometría no euclídea eran utilizados en un ámbito distinto del de la geometría.

> «Este es un camino fértil que el autor no ha recorrido en su totalidad, pero que pone de manifiesto un espíritu creativo y profundo. La comisión no puede más que animarle a continuar con su investigación, y llamar la atención de la Academia sobre el excelente talento de que da prueba.»
>
> — **Del informe de la comisión del premio de la Academia de 1880 sobre el trabajo de Poincaré.**

Estos teselados del disco en geometría no euclídea inspiraron algunos de los dibujos del artista holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972). En la figura 9 vemos uno de ellos. Los peces se repiten desde el centro del disco hacia su periferia formando un teselado que, en nuestro plano euclídeo, no es uniforme. La base del teselado es un polígono de cuatro lados curvos. Los lados están formados por geodésicas, las líneas más cortas entre dos puntos y que son el equivalente de las líneas rectas en las geometrías no euclídeas.

En marzo de 1881 la comisión encargada de otorgar el premio de la Academia hizo pública su decisión. El premio fue concedido finalmente al matemático Georges Halphen (1844-1889) por un trabajo extenso y muy completo que también se inspiraba en los de Fuchs. El trabajo de Poincaré recibió la distinción del tribunal.

En los años siguientes Poincaré seguiría trabajando y publicando sobre el tema, profundizando en sus ideas. En esta época, en concreto en el año 1881, Poincaré inició una relación epistolar con Gösta Mittag-Leffler, que se convirtió en uno de sus mayores admiradores y valedores. Este matemático sueco había estudiado con Hermite en París y con Weierstrass en Berlín. Siendo de un tercer país, sirvió de puente entre las comunidades matemáticas

GÖSTA MITTAG-LEFFLER (1846-1927)



Mittag-Leffler nació en Estocolmo y se doctoró en la Universidad de Upsala. Tras el doctorado estuvo en viaje de estudios en París, Gotinga y Berlín, donde conoció a los matemáticos más importantes de la época, como Hermite o Weierstrass. Ocupó una cátedra de Matemáticas en la Universidad de Helsinki para convertirse luego en catedrático de la Universidad de Estocolmo, de la que fue rector. En 1882 se casó con una finlandesa adinerada, Signe Lindfors, cuya fortuna le permitió establecer una valiosa biblioteca matemática. El matrimonio conoció a Poincaré y a su esposa en París, adonde viajaron durante su luna de miel. Mittag-Leffler desarrolló una gran actividad diplomática entre los matemáticos europeos de su tiempo. A iniciativa suya, el rey de Suecia Óscar II convocó un premio matemático con motivo de su sesenta cumpleaños, premio que ganaría Poincaré. Mittag-Leffler fundó, y dirigió durante varios años, la revista *Acta Mathematica*.

de Alemania y Francia, un papel muy necesario en una época dominada por el resentimiento francés a causa de la derrota en la guerra franco-prusiana. La correspondencia entre Poincaré y Mittag-Leffler duró hasta la muerte de Poincaré, y ambos matemáticos desarrollaron una respetuosa amistad, teniendo ocasión de encontrarse varias veces a lo largo de su vida.

En 1882 Mittag-Leffler fundó la revista *Acta Mathematica*, patrocinada por el rey de Suecia. Su idea era que esta publicación se convirtiera en una obra de referencia para las matemáticas europeas y que en ella publicaran tanto alemanes como franceses. A instancias de Mittag-Leffler, Poincaré envió a *Acta Mathematica* cinco artículos sobre las funciones fuchsianas y una generalización de estas, que llamó «kleinianas», entre 1882 y 1884. Todos estos trabajos juntos sumaban un total de 390 páginas de la revista y en

ellos Poincaré completaba el programa que la Academia sugería en su valoración del trabajo presentado al premio de 1880. Entre otras cosas, Poincaré demostró que cualquier ecuación diferencial con coeficientes algebraicos podía resolverse con las funciones fuchsianas, kleinianas y otras relacionadas con estas. Hoy en día estas funciones se conocen con el nombre de «automórficas» y su teoría está lejos de estar desarrollada completamente.

Se conoce una anécdota que evidencia la personalidad de Poincaré y el estado de concentración en que vivía cuando tenía entre manos un problema importante. Se trata del relato que hizo su compañero de la politécnica Léon Lecornu de una Nochevieja que pasaron juntos en Caen:

> En esa época él estaba más distraído que nunca. Yo le había invitado a cenar en casa de mis padres el 31 de diciembre de 1879, y todavía puedo verlo pasar la velada andando para arriba y para abajo, no escuchando nada de lo que se le decía o respondiendo apenas con monosílabos, y olvidando qué hora era, tanto que pasada la medianoche decidí recordarle amablemente que estábamos en 1880. En ese momento pareció volver a poner los pies en el suelo, y se despidió de nosotros. Unos días más tarde, nos encontramos en el puerto de Caen, y casualmente me dijo: «Ahora sé cómo integrar todas las ecuaciones diferenciales». Las funciones fuchsianas habían nacido, y supe entonces en qué estaba él pensando cuando pasaba de 1879 a 1880.

CONTROVERSIA CON KLEIN

Cuando los primeros trabajos de Poincaré sobre las funciones fuchsianas aparecieron en la revista de la Academia de Ciencias, el matemático alemán Felix Klein escribió a Poincaré en la que fue la primera de un intercambio de más de veinte cartas. Una curiosidad de esta relación epistolar es que ambos escribían en su lengua: Poincaré escribía sus cartas en francés y Klein las suyas en alemán.

Klein llevaba tiempo trabajando sobre las funciones elípticas y su generalización y relación con las ecuaciones diferenciales, y

FELIX KLEIN (1849-1925)

Klein nació en Düsseldorf y fue profesor en las universidades de Erlangen, Múnich, Leipzig y Gotinga, donde permaneció desde 1886 hasta su muerte. Trabajó en diversos campos de las matemáticas: teoría de grupos, geometría, ecuaciones diferenciales, etc. Pero fueron especialmente importantes sus contribuciones a la geometría no euclídea, ya que hizo patente que era posible construir geometrías no euclídeas consistentes. Ideó la superficie que lleva el nombre de «botella de Klein», una superficie cerrada, pero que solo tiene un lado, por lo que no podemos asociarle una dirección hacia adentro y otra hacia afuera. La botella de Klein, que podríamos imaginar como una aspiradora que se aspira a sí misma, no es realizable en nuestro espacio tridimensional.



Felix Klein retratado hacia los setenta años de edad. Obra del pintor y grabador alemán Max Liebermann.

llamaba la atención de Poincaré sobre sus trabajos y los de la escuela alemana, que Poincaré parecía conocer solo parcialmente. Poincaré respondió inmediatamente a la primera carta de Klein, agradeciendo la información que le proporcionaba, admitiendo que Klein había ya obtenido alguno de los resultados a los que el propio Poincaré había llegado y prometiendo que haría referencia a las contribuciones del alemán en sus siguientes trabajos.

En estos primeros intercambios epistolares quedó claro que Poincaré no conocía toda la extensa bibliografía alemana sobre el tema, en particular algunos de los trabajos de Klein y Schwarz. Debe considerarse que en aquellos momentos el matemático francés era profesor en Caen, una universidad de provincias, por lo que no tenía acceso a todas las publicaciones que podían ser relevantes. De hecho, Poincaré en su primera carta a Klein prometía que buscaría los volúmenes necesarios de la revista alemana *Mathematische Annalen*, que no se encontraban en la biblio-

teca de Caen. En aquellos tiempos, y eso ha sido así hasta la irrupción de internet en nuestras vidas, era a veces difícil, y sobre todo costoso económicamente, tener acceso a todas las publicaciones que podían ser relevantes en un tema dado.

Pero en su segunda carta Klein hizo notar algo que le había molestado especialmente. En sus propias palabras:

> Rechazo el apelativo de «funciones fuchsianas», aunque comprendo que ha sido a través del trabajo de Fuchs que usted llegó a estas ideas. [...] No niego los grandes méritos del señor Fuchs en otras ramas de la teoría de ecuaciones diferenciales, pero exactamente en esta área su trabajo deja mucho que desear.

Klein advertía a Poincaré en esa misma carta de que había otros matemáticos de la escuela de Riemann que colaboraban con él en la teoría de transformaciones similares a las que usaba Poincaré y que él llamaba fuchsianas.

Como ya se ha apuntado, Poincaré no disponía de toda la información relevante. Pero su respuesta a Klein no dejaba de tener lógica:

> En cuanto al nombre de funciones fuchsianas, no lo cambiaré. El respeto que tengo por el señor Fuchs me prohíbe hacerlo. Aparte de eso, es cierto que el punto de vista del matemático de Heidelberg es completamente diferente del suyo y del mío. También es cierto que su trabajo me ha servido como punto de partida y la base para todo lo que he hecho en esta teoría.

Cuando Poincaré fue teniendo más elementos de juicio fue cambiando de opinión. En otra carta a Klein puede leerse:

> Con respecto al señor Fuchs y al nombre de funciones fuchsianas, está claro que debería haber escogido otro nombre, si hubiera conocido el trabajo de Schwarz. Pero he sabido de esto solo por las cartas de usted, después de la publicación de mis resultados, así que ya no puedo cambiar el nombre sin cometer una falta de consideración con el señor Fuchs.

El intercambio de cartas fue largo y profundo por ambas partes, y no cabe duda de que los dos grandes matemáticos se influyeron mutuamente en sus respectivas investigaciones, obteniendo, ambos, notables avances gracias a ese intercambio. En particular, Poincaré había estado usando las transformaciones del tipo

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

sujetas a la condición de que una determinada circunferencia del plano complejo fuera invariante, es decir, que un punto de la circunferencia se transforme en otro punto de dicha circunferencia. Klein estaba explorando las posibilidades que no requerían esta condición y llamó la atención de Poincaré sobre este punto. En una comunicación a la revista de la Academia de Ciencias de 1881, Poincaré analizó estas transformaciones, reconoció que Klein era quien le había dado la idea y propuso llamarlas *kleinianas*, y llamar funciones *kleinianas* a las funciones a las que daba lugar. Aquello parecía un intento por desagraviar al alemán, y la respuesta de Klein no se hizo esperar. En una carta a Poincaré escribió:

> Me quedé en cierta forma sorprendido con el nombre que usted ha dado a esta clase de funciones. En cuanto a mí respecta no usaré el apelativo «Fuchs» ni «Klein», sino que seguiré llamándolas «funciones que contienen transformaciones lineales».

Como ya se ha apuntado, Poincaré completó en estos meses su investigación sobre las funciones «fuchsianas» y «kleinianas» y su relación con la geometría no euclídea y las ecuaciones diferenciales. Klein felicitó a Poincaré por sus logros y le pidió que escribiera un resumen de sus resultados para la revista alemana *Mathematische Annalen*, que él se encargaría de publicar con una nota suya. El artículo, de doce páginas, salió publicado a principios de 1882 y en él Poincaré, como era de esperar, denominaba a sus funciones fuchsianas y kleinianas. El artículo estaba escrito en francés y le seguía una nota de Klein, escrita en alemán. En ella, alababa el trabajo de Poincaré y lo ponía en contexto, pero

también era tajante respecto a los nombres escogidos para las funciones:

> Las investigaciones que el señor Schwarz y yo hemos publicado hace mucho tiempo tratan de las «funciones fuchsianas», acerca de las cuales el señor Fuchs no ha publicado nada.

Ante esta oposición frontal a la elección del nombre, Poincaré solicitó a Klein que le permitiera explicar en la misma revista sus razones. A lo que Klein accedió, pero advirtiendo que, a su vez, añadiría una corta nota suya reafirmando su posición, lo que así hizo. Con ello daba por terminada la discusión. Poincaré respondió citando, no sin ironía, a Goethe: «*Name ist Schall und Rauch*» («Un nombre es sonido y humo»). Los dos dieron por concluido el asunto. Poincaré siguió llamando fuchsianas y kleinianas a sus funciones, y Klein y los suyos, no. Lo cierto es que el criterio de Klein es el que se impuso y hoy en día estas funciones son conocidas con el nombre genérico de «automórficas».

Aunque el debate sobre los nombres de las funciones tensó la relación entre los dos matemáticos no pasó de un debate educado y cortés. Probablemente todo escoció más del lado alemán. Klein era por entonces un matemático establecido y reconocido, con su cátedra en Leipzig, mientras que Poincaré había iniciado la discusión siendo profesor en Caen (aunque ya estaba en París cuando el debate concluyó). Que un joven francés advenedizo se atreviera a distribuir los méritos entre los matemáticos alemanes no le debió hacer mucha gracia. Pero Poincaré y Klein volvieron a cartearse y colaboraron más tarde en la organización de reuniones y congresos matemáticos, manteniendo siempre en sus contactos un tono cortés y cordial.

CAPÍTULO 3

Poincaré gana un concurso

El rey de Suecia Óscar II convocó un concurso matemático al que Poincaré presentó un ensayo que resultó ser el ganador. En él Poincaré estudió una forma aproximada del llamado problema de los tres cuerpos: tres cuerpos masivos que se atraen mutuamente según la ley de la gravedad de Newton. Las ideas y los métodos que Poincaré utilizó en su ensayo forman parte de lo que hoy se conoce como teoría de los sistemas dinámicos. El premio le valió a Poincaré la fama universal, pero no sin cierta polémica.

Pocos meses después de casarse, el 19 de octubre de 1881, Poincaré obtuvo una plaza de profesor en la Facultad de Ciencias en la Universidad de la Sorbona de París. Su puesto era el de *maître de conferences*, una figura que sigue existiendo hoy en día y que equivale a la de profesor titular. El término *conferences* hace referencia a los grupos en los que se dividían los alumnos de una clase para la realización de problemas o ejercicios prácticos. El *maître de conferences* era el encargado de estos grupos reducidos.

La carrera de Poincaré en París fue meteórica. El 6 de noviembre de 1883 obtuvo el puesto de tutor en la École Polytechnique, la institución donde inició sus estudios superiores, y el 16 de marzo de 1885, la plaza de profesor suplente de Mecánica Física y Experimental en la Sorbona. Poco después, se postuló para la cátedra de Física Matemática y Probabilidad, que obtuvo en el verano de 1886. La rápida ascensión de Poincaré en París no se explica solo por sus indudables cualidades, reconocidas por todo el estamento científico francés, sino también por sus contactos en el Ministerio de Educación —Jules Duvaux, quien fue ministro entre agosto de 1882 y febrero de 1883, era de Nancy y había sido paciente de su padre— y, sobre todo, por el apoyo incondicional de su antiguo profesor Charles Hermite. Este último utilizó todos sus recursos e influencias para colocar en puestos de relevancia a sus tres protegidos: Émile Picard, su yerno, Paul Appell, su sobrino

político, y Henri Poincaré, su antiguo alumno. Ni que decir tiene que los tres tenían sobrados méritos para ocupar los puestos a los que accedieron, pero también parece claro que, sin ese apoyo, ninguno de ellos hubiera accedido tan pronto a una cátedra en París, al poco de cumplir los treinta años (la edad mínima para acceder a una cátedra en Francia en esa época).

A principios de la década de 1880 la Facultad de Ciencias de la Sorbona vivió un notable relevo generacional. La generación a la que Hermite pertenecía, nacida en torno a 1820 y que incluía a matemáticos de la talla de Liouville, estaba llegando al final de su vida activa. Por muerte o jubilación, varias cátedras de matemáticas quedaron vacantes estos años y se produjo una sorda batalla por ellas. De entre los más ilustres aspirantes que nunca llegarían a tener una cátedra en París merece la pena destacar, por sus contribuciones a la física matemática, a Émile Mathieu (1835-1890), que quedó por detrás de Poincaré en el concurso de acceso a la cátedra de Física Matemática y Probabilidad.

Picard obtuvo su cátedra en Cálculo Diferencial e Integral a la vez que Poincaré la suya. Appell la había obtenido antes, en Mecánica Racional, justo con treinta años recién cumplidos. Si la asignación de las cátedras de Picard y Appell se correspondía con sus carreras anteriores, la designación de Poincaré para la cátedra de Física Matemática era más extraña. Hasta ese momento Poincaré no había trabajado en física, si se exceptúan sus primeros trabajos en mecánica celeste. Su designación para esta cátedra se debe, probablemente, a un interés personal por iniciar una carrera científica en este campo, y el devenir posterior de los acontecimientos va en ese sentido, porque a partir de entonces Poincaré empezó a publicar trabajos en diversos problemas de física. Para obtener una plaza así, el apoyo de Hermite tuvo que ser esencial.

EL PREMIO DEL REY ÓSCAR II DE SUECIA

Como vimos en el capítulo anterior el estudio de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones fue uno de los primeros temas que

interesaron a Poincaré. Si todo el trabajo desarrollado sobre las funciones fuchsianas tenía por objetivo final la resolución de un cierto tipo de ecuaciones diferenciales, pronto Poincaré comprendió que eso no era suficiente, que había problemas más generales que requerían un cambio de táctica. Nos referimos, por ejemplo, a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de los planetas del sistema solar. De hecho, cualquier sistema mecánico, ya sea un muelle, un péndulo, un sistema de péndulos o una peonza, se rige por ecuaciones diferenciales. En 1881, estando aún en Caen, Poincaré escribió un artículo sobre ecuaciones diferenciales en el que ya exploraba un nuevo camino que, andado el tiempo, llevaría a toda una nueva rama de las matemáticas: lo que hoy conocemos como teoría de los sistemas dinámicos.

Las ecuaciones diferenciales que podían resolverse analíticamente, esto es, dando una expresión explícita de su solución, eran, y siguen siendo, muy pocas. Para Poincaré parecía necesario tener herramientas cualitativas para estudiar el comportamiento general de las soluciones de una ecuación diferencial, aun cuando no se fuera capaz de resolverla. Él mismo se refería a ello diciendo que era necesaria una comprensión *cualitativa* del tipo de soluciones que cabía esperar, para luego dar valores cuantitativos de ciertos casos especiales. Esa comprensión cualitativa iba de la mano de la geometría.

Pongamos un ejemplo. En el capítulo anterior vimos que la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

rige el movimiento de un bloque atado a un muelle. Si tiramos del bloque y lo soltamos, este ejecuta un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio. Podemos hacer una representación geométrica de este movimiento si trazamos dos ejes coordenados y en el eje de abscisas consignamos la posición del bloque, x, y en el de ordenadas, su velocidad:

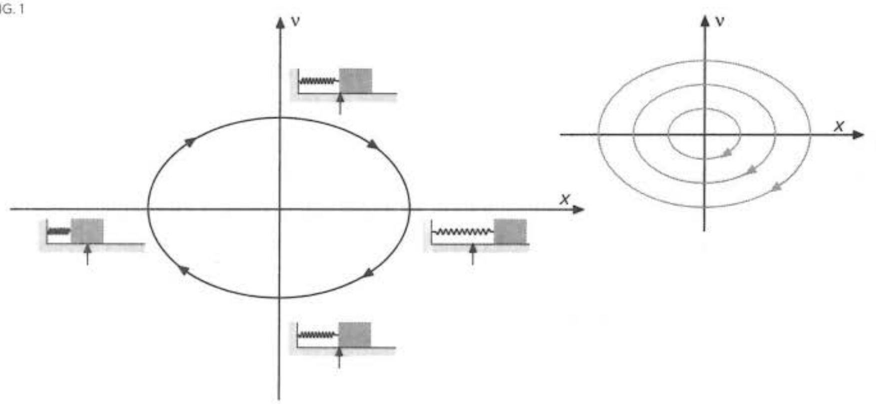
$$v=\frac{dx}{dt}.$$

La figura 1 muestra esta representación. En el momento de desplazar el bloque, la posición x es, pongamos, mayor que cero y su velocidad, justo al soltarlo, es cero. El bloque tirado por el muelle se acelera, se acerca a la posición de equilibrio y su velocidad va aumentando. Cuando pasa por el equilibrio $x = 0$ la velocidad es máxima. Luego, el muelle empieza a comprimirse y va frenando al bloque, que termina parándose, pero al otro lado del punto de equilibrio. El muelle se estira, acelerando al bloque hacia el otro lado y vuelve a pasar por el equilibrio, ahora con velocidad máxima pero de signo contrario, hasta que vuelve a la posición inicial. En el diagrama (x,v) el movimiento de ida y vuelta del muelle se representa con una línea cerrada (una elipse en este caso). Podemos imaginar ahora que repetimos la experiencia, pero con distintas elongaciones iniciales del muelle. Cada movimiento subsiguiente vendrá representado por una elipse diferente. Es posible, por lo tanto, representar en el diagrama todas las soluciones de la ecuación, que en este caso se corresponden con curvas cerradas.

El movimiento de la masa atada al muelle es particularmente sencillo, y el diagrama (que en física matemática se suele denominar «espacio de las fases») no aporta ninguna información adicional a una solución que ya conocemos analíticamente y que es expresable, como hemos visto en el capítulo anterior, como combinación de funciones seno y coseno.

Representación geométrica de las soluciones de la ecuación diferencial que describe el movimiento de un bloque atado a un muelle.

FIG. 1



Pero podemos imaginar un caso un poco más complicado. Consideremos un péndulo en el que una bola está sujeta al punto desde el que cuelga por una delgada barra rígida; se trata, pues, de un columpio idealizado. Podemos trazar un diagrama en el que en un eje anotamos la posición, y en el otro, la velocidad (figura 2). En este caso, la posición la da el ángulo que la barra forma con la vertical.

Para oscilaciones pequeñas en torno al punto de equilibrio las cosas son similares al caso del muelle, y un diagrama en el que representemos el ángulo en el eje de abscisas y la velocidad en el eje de ordenadas tiene un aspecto parecido al anterior. Pero si desplazamos el péndulo más y más cada vez, llega un momento en que puede alcanzar el punto en el que la bola está por encima, en la vertical del punto del que cuelga. Si lanzamos el péndulo con mucha fuerza, este empezará a rotar alrededor del eje si el punto de enganche lo permite. De un movimiento de oscilación pasamos a uno de rotación. Esto es lo que ocurre en un columpio si empujamos con demasiada fuerza. El diagrama posición-velocidad tiene ahora un aspecto diferente, tal y como puede verse en la figura 3.

Vemos que hay dos puntos interesantes en este diagrama: $\theta = 0$ y $v = 0$, por un lado, y $\theta = \pm\pi$ y $v = 0$ por otro (los puntos $\theta = \pm\pi$ representan la misma posición del péndulo). Estos son puntos de

FIG. 2

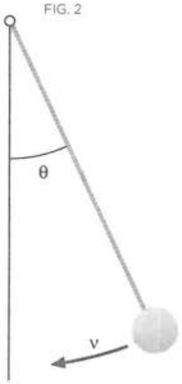
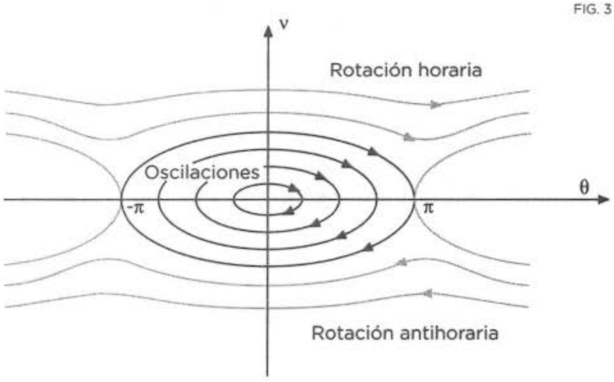


FIG. 3

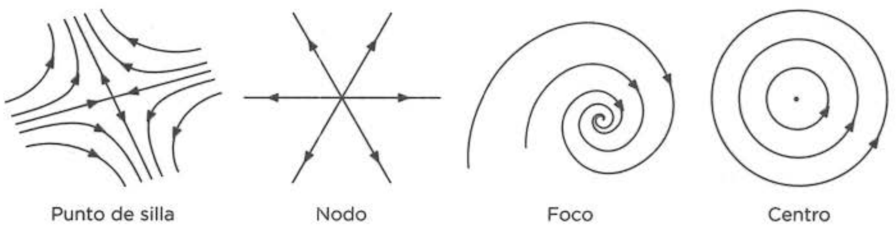


equilibrio del sistema, porque, si damos exactamente esos valores a las variables, el péndulo se queda justo ahí, sin moverse. Pero estos dos puntos, siendo los dos puntos de equilibrio, tienen un carácter diferente. El punto $\theta = 0$ y $v = 0$, que corresponde a la bola del péndulo en la posición más baja, es lo que llamamos un equilibrio estable. Si desplazamos un poco el péndulo de esa posición, tratará de volver a ella. En cambio, $\theta = \pm\pi$ y $v = 0$, que corresponde a cuando la bola está arriba del todo, es un equilibrio inestable: cualquier pequeña perturbación hace que la bola se aleje de él, cayendo. Además, hay dos tipos de curvas cualitativamente distintas en el diagrama: las curvas alrededor de $\theta = 0$ y $v = 0$ son cerradas, pero las curvas que representan movimiento de rotación, cuando superamos el punto superior de equilibrio, no lo son (aunque en la dinámica real también representan un movimiento periódico).

El movimiento general del péndulo es bastante más complejo que el del muelle, aunque también en este caso hay soluciones analíticas, eso sí, mucho más complicadas. Podemos entrever ya que, para un sistema físico cualquiera, las cosas pueden ser muy farragosas: pueden existir varios puntos de equilibrio, cada uno con un carácter diferente, o, sobre todo, haber varios cuerpos involucrados y con movimiento en todas las direcciones del espacio, por lo que el número de variables del problema puede llegar a ser muy grande. El enfoque cualitativo de Poincaré iba en ese sentido: en general, habrá ecuaciones, o sistemas de ecuaciones (esto es, varias ecuaciones diferenciales acopladas entre ellas), que seamos incapaces de resolver para cualquier valor de las condiciones iniciales. Pero puede ser de mucha ayuda saber cuántos equilibrios hay, si hay

Clasificación de los puntos de equilibrio.

FIG. 4



soluciones que unan esos puntos de equilibrios, si hay soluciones periódicas, si hay soluciones que se van al infinito, etc. En definitiva, tener una idea general de la estructura geométrica de las soluciones. Poincaré pasó de hablar de funciones a hablar de curvas y de las superficies que formaban esas curvas. El mundo de las ecuaciones diferenciales se adentraba así en el de la geometría y, después y más sutilmente todavía, en el de la topología.

Ya en su artículo de 1881 al que hemos hecho referencia, Poincaré introdujo una clasificación de los puntos de equilibrio posibles en un sistema de ecuaciones diferenciales. Los clasificó en puntos de silla, nodos, focos y centros (figura 4). Esa clasificación es la que se sigue usando hoy en día.

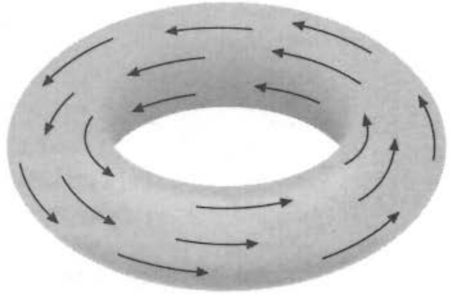
El primer resultado interesante que dedujo Poincaré se inspiraba en los trabajos anteriores de Maxwell sobre las líneas de nivel de un mapa, a las que se parecen las curvas de los diagramas de la figura 4. Poincaré estableció que el número de nodos más el de focos o centros es igual al número de puntos de silla más 2. Si llamamos N al número de nodos, F al de focos o centros, y S al de puntos de silla, tenemos: $N+F=S+2$. Esta fórmula recuerda a la relación de Euler entre las caras, aristas y vértices de un poliedro, que vimos en el capítulo 1, y de hecho está íntimamente relacionada con ella.

La ecuación de Poincaré $N+F=S+2$ es válida sobre una esfera, pero no sobre una superficie cualquiera. Al igual que ocurría con la fórmula de Euler, hay que generalizarla para incluir superficies multiconexas, como el toro. Y la generalización es la misma que vimos en el capítulo 1. Para una superficie con g agujeros la fórmula es $N+F=S+2-2g$; así, por ejemplo, para un toro $g=1$, $N+F=S$.

Este resultado llevó a Poincaré a una conclusión ya conocida, pero ahora establecida rigurosamente: sobre un toro es posible tener un conjunto de soluciones de

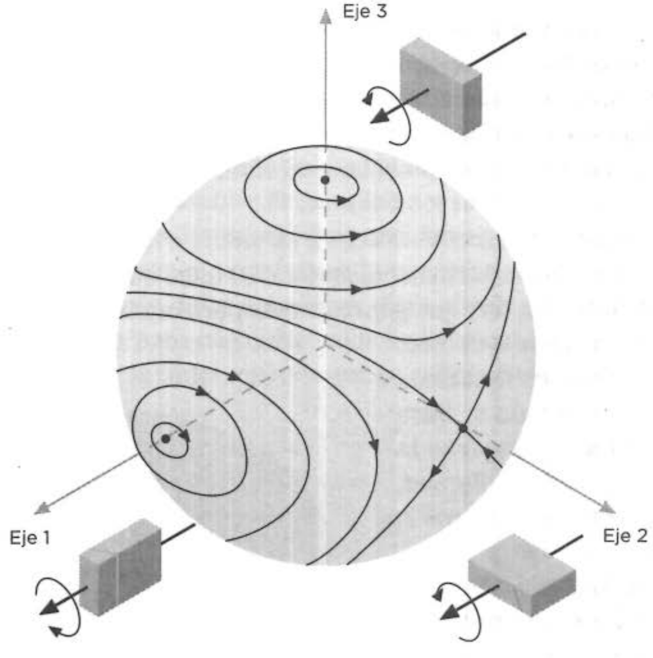
Flujo sobre un toro sin puntos de equilibrio.

FIG. 5



EL VUELO DE UNA CAJETILLA DE TABACO

Si lanzamos una cajetilla de tabaco al aire, esta puede girar en torno a tres ejes. Todas las formas de giro posible se pueden representar mediante líneas en una esfera en la que marcamos los tres ejes de giro, tal y como puede verse en la figura. Por ejemplo, las líneas cerradas en torno al eje 1 representan un movimiento de rotación en torno a este eje. En este caso tenemos centros y puntos de silla, pero la fórmula de Poincaré impide que todos sean centros o todos puntos de silla. Si tenemos, como es el caso, cuatro centros, los dos pertenecientes al eje 1 y al eje 3, necesariamente los otros dos son puntos de silla. Este razonamiento cualitativo nos lleva a una interesante predicción que el lector puede comprobar por sí mismo experimentalmente: al lanzar la cajetilla de tabaco al aire vemos que gira establemente en torno a dos ejes, pero el giro en torno al tercero es necesariamente inestable. Este ejemplo muestra las posibilidades del enfoque cualitativo de Poincaré: podemos hacer predicciones sobre el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin resolverlo explícitamente.



Ejes de rotación estables e inestables de una cajetilla de tabaco.

un sistema de ecuaciones diferenciales en el que no exista ningún equilibrio, tal y como muestra la figura 5 (pág. 77).

Esto es imposible para una esfera, porque aun en ausencia de puntos de silla es necesario tener al menos nodos y focos en número que sumen 2. Esa es la razón de que tengamos el remolino en la coronilla: no es posible peinar a una persona orientando el pelo siempre en la misma dirección sin tener un punto en el que el pelo se arremoline (un foco, en la terminología de Poincaré). Esta restricción no se aplica a las personas que tienen calva la coronilla, porque el dominio en el que hay pelo tiene ahora un agujero y en la fórmula de Poincaré hay que considerar $g = 1$ en ese caso.

MITTAG-LEFFLER CONVENCE AL REY

En la época en la que Poincaré se hallaba inmerso en este tipo de cuestiones, Göta Mittag-Leffler convenció al rey de Suecia Óscar II para que convocara un concurso científico. El rey era un amante de la ciencia y de las matemáticas y aceptó la propuesta del matemático sueco. El concurso fue convocado en el verano de 1885 y la entrega del premio al vencedor tendría lugar el 21 de enero de 1889, coincidiendo con el sexagésimo cumpleaños del rey. El premio consistía en una medalla de oro con la efigie del monarca y una cantidad en metálico (2500 coronas). Su convocatoria apareció en las revistas científicas de toda Europa y el plazo de entrega de los trabajos era el 1 de junio de 1888.

La organización del concurso fue bastante complicada y Mittag-Leffler tuvo que hacer uso de todas sus habilidades diplomáticas para que el evento no terminara en un escándalo. De entrada tuvo que renunciar a formar un jurado tan amplio como él hubiera querido, porque parecía claro que no iba a ser fácil poner de acuerdo a grandes matemáticos de más de tres países en la elección de los temas y en acordar el veredicto final. Así, aunque en principio pensó incluir al ruso Pafnuty Chebyshev (1821-1894) o al británico Arthur Cayley (1821-1895), tuvo que reducir el jurado a tres personas: él mismo y los ya citados Karl Weierstrass y Charles Hermite.

Los participantes debían escoger entre cuatro temas, uno de los cuales parecía propuesto pensando en Poincaré: avanzar en la teoría de las funciones fuchsianas. Ya se ha comentado anteriormente que ese término era controvertido, pero la convocatoria del premio así las designaba. Sin embargo, tal vez para sorpresa de Mittag-Leffler y Hermite, Poincaré escogió para su trabajo otro de los temas propuestos, el primero, que versaba sobre la estabilidad del sistema solar.

Tal y como se vio en el capítulo 1, aunque Laplace creyó demostrar que el sistema solar era estable, los trabajos de Le Verrier realizados a mediados del siglo XIX pusieron en cuestión esa conclusión. A final de siglo el problema seguía sin tener una solución satisfactoria. En la convocatoria del premio del rey de Suecia se hacía referencia a un rumor según el cual el gran matemático alemán Lejeune Dirichlet (1805-1859) habría demostrado de manera rigurosa la estabilidad del sistema solar, siguiendo para ello un método de su invención. El premio se le otorgaría a la persona que diera con ese método y resolviera la cuestión. Pero también se aclaraba que, en caso de que nadie fuera capaz de dar una solución clara y definitiva al problema de la estabilidad, el premio se otorgaría al trabajo en que se planteara y resolviera algún otro problema de mecánica relacionado.

Y aquí fue donde Mittag-Leffler tuvo que hacer frente a otro conflicto diplomático. Leopold Kronecker (1823-1891), alumno de Dirichlet y colega de Weierstrass en Berlín, cargó contra la convocatoria: por un lado, sostenía que uno de los cuatro problemas ya había sido resuelto casi en su totalidad por él mismo años antes y, por otro, que él había estado con Dirichlet antes de la muerte de este y que no era cierto lo que se contaba de él en el preámbulo del primer problema. Como este preámbulo había sido escrito por Weierstrass, con quien Kronecker tenía malas relaciones, Hermite se lavó las manos, diciendo que era un asunto entre alemanes. Mittag-Leffler, mal que bien, paró los intentos de Kronecker de reventar la convocatoria y prometió resolver todas estas cuestiones una vez el premio se hubiera otorgado.

Al premio se presentaron doce trabajos; cinco de ellos trataban sobre el problema que nos ocupa. Poincaré presentó una me-







FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Henri Poincaré en una fotografía realizada en la década de 1890, época en la que el matemático desarrolló sus estudios de topología.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Óscar II de Suecia, quien convocó un concurso científico que sería ganado por Poincaré no sin generar cierta polémica.

FOTO INFERIOR:
La capilla de la Sorbona, anexa a la universidad parisina, donde Poincaré impartió clases a partir de 1881.

moria titulada: «Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica». Las memorias debían ser anónimas y se presentaban con un seudónimo. Aun así, tanto Hermite como Mittag-Leffler sabían que Poincaré se iba a presentar al premio. Y, además, ambos conocían perfectamente no solo su estilo, sino también su letra, ya que se carteaban habitualmente. Todos estos detalles no favorecían, desde luego, la impresión de imparcialidad que el matemático de Estocolmo pretendía dar.

Mittag-Leffler encargó a un joven matemático sueco, Lars Edvard Phragmén (1863-1937), la lectura de los trabajos a fin de hacer una primera criba. De los doce, Phragmén escogió tres, que fueron estudiados en detalle por la comisión. A la vista de las tres memorias la comisión decidió por unanimidad otorgar el premio al trabajo presentado por Poincaré y concedió un accésit a una segunda memoria cuyo autor no era otro que Paul Appell, el gran amigo de Poincaré.

Pero los dolores de cabeza no habían terminado para Mittag-Leffler. El anuncio del ganador y de los hallazgos realizados por él era tan escueto que el astrónomo Hugo Gyldén (1841-1946), que pertenecía a la Real Academia Sueca y era miembro del consejo editorial de la revista *Acta Mathematica*, protestó ante la Academia argumentando que él había resuelto esas cuestiones dos años antes. El mismo rey pidió explicaciones y Poincaré, a instancias de Mittag-Leffler, dejó claro todo lo que había de nuevo, que era mucho, en su trabajo.

El rey Óscar II anunció el día de su cumpleaños la concesión del premio y la noticia tuvo un eco inmediato en la prensa francesa. El triunfo de dos matemáticos nacionales colmó los sentimientos patrióticos de los franceses, más si cabe cuando se trataba de un premio europeo al que habían concurrido también matemáticos alemanes. Como muestra de agradecimiento, el Gobierno francés concedió a Appell y Poincaré la Legión de Honor.

El trabajo presentado por Poincaré era de tal envergadura y profundidad que ni siquiera los tres miembros de la comisión —todos ellos grandes matemáticos de la época— pudieron comprenderlo en su totalidad en un primer momento. Además, el autor, fiel a su estilo, daba muchas cosas por sabidas y no completaba siempre sus argumentos.

Estaba previsto que la memoria fuera publicada en la revista *Acta Mathematica*, de la que Mittag-Leffler era editor y que contaba con el patrocinio del rey Óscar. Pero el mismo Mittag-Leffler pidió a Poincaré que añadiera explicaciones y aclaraciones a la memoria, para facilitar así una mejor comprensión. Mittag-Leffler encargó a Phragmén, el mismo matemático que había realizado la primera selección de los trabajos presentados al premio, que revisara la memoria de Poincaré antes de enviarla a su publicación. Phragmén trabajó en ello con inusitada dedicación, y pidió a Poincaré cuantas aclaraciones consideró necesarias. El trabajo de Phragmén dio, como veremos más adelante, un fruto inesperado.

> «La memoria de Poincaré es de tan excepcional profundidad y creatividad que ciertamente abrirá una nueva era desde el punto de vista del análisis y sus consecuencias para la astronomía.»
>
> — Carta de Hermite a Mittag-Leffler sobre el trabajo que Poincaré presentó al premio del rey de Suecia.

Finalmente el trabajo ganador fue publicado en *Acta Mathematica* en enero de 1890; ocupaba 270 páginas del tomo correspondiente. En el mismo número se publicó el trabajo de Paul Appell.

EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Una buena parte del trabajo de Poincaré estaba dedicado a analizar el denominado «problema de los tres cuerpos». Considerar el sistema solar en su conjunto era una tarea imposible, aunque el análisis se restringiera solo a los planetas. Newton y sus seguidores habían estudiado a fondo el problema de dos cuerpos que se atraen mutuamente siguiendo la ley de la gravedad. Las trayectorias posibles se clasificaban en elipses, parábolas e hipérbolas. El siguiente problema en complejidad era considerar tres cuerpos que se atrajeran mutuamente por la misma ley. Pero este problema, en su formulación general, ya era demasiado compli-

cado. Así que Poincaré decidió estudiar lo que se conoce como el «problema de los tres cuerpos restringido». En él se supone que uno de los cuerpos tiene una masa despreciable comparada con las de los otros dos. Los dos cuerpos grandes se mueven como si el tercero no existiera y sus trayectorias son, por lo tanto, conocidas. El problema restringido consiste en encontrar la trayectoria del tercer cuerpo. Puede parecer increíble, pero la complejidad del problema de los tres cuerpos es tal que ni siquiera la versión restringida puede considerarse completamente resuelta hoy en día.

Poincaré se centró en detalle en un problema aún más simplificado. En el artículo publicado en *Acta Mathematica* lo describió así:

> Imaginemos dos cuerpos: el primero, de gran masa; el segundo, de masa finita, pero muy pequeña, y supongamos que estos dos cuerpos describen en torno a su centro de gravedad común una circunferencia en un movimiento uniforme. Consideremos además un tercer cuerpo, de masa infinitamente pequeña, de forma que su movimiento se ve afectado por la atracción de los dos primeros cuerpos, pero él no puede afectar la órbita de estos dos primeros cuerpos. Limitémonos además al caso en que este tercer cuerpo se mueve en el plano de las circunferencias descritas por los dos primeros cuerpos. Este es el caso de un pequeño planeta que se mueve bajo la influencia de Júpiter y del Sol cuando se desprecia la excentricidad de Júpiter y la inclinación de las órbitas. Este es el caso también de la Luna moviéndose bajo la influencia del Sol y de la Tierra cuando se desprecia la excentricidad de la Tierra y la inclinación de la órbita de la Luna respecto de la eclíptica.

Y también es el caso, podríamos añadir hoy, de la trayectoria de una nave espacial que viaje, por ejemplo, entre la Tierra y la Luna.

El problema de los tres cuerpos restringido así planteado conduce a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales, y se mostró mucho más endiablado de lo que cualquiera podía esperar. El primer resultado importante al que llegó Poincaré es que, aparte de la energía, no existe otra cantidad invariante en el movimiento del cuerpo

de masa despreciable. Esto equivale a decir que no podemos dar una expresión explícita que resuelva el problema de manera general. Y este resultado, además, es aplicable, excepto casos especiales, a todos los sistemas de ecuaciones diferenciales con tres o más ecuaciones. Este resultado respondía ya a la pregunta formulada en el premio, la de la estabilidad del sistema solar. Si no podemos resolver el problema de los tres cuerpos es imposible resolver el del sistema solar en su conjunto, así que el problema propuesto en el premio del rey no se podía resolver tal y como estaba planteado. No hay que malinterpretar este hallazgo, ya que tampoco significa que el sistema solar sea inestable, sino que la cuestión de la estabilidad es muy complicada y tiene muchos matices.

EL ETERNO RETORNO

Uno de los resultados más famosos del trabajo de Poincaré para el premio del rey Óscar II de Suecia es su teorema de recurrencia. El matemático francés estableció que si un sistema de ecuaciones diferenciales da lugar a un movimiento que está restringido a una región del espacio, y si el movimiento es tal que el volumen de una región del espacio se mantiene constante cuando se mueve por curvas que son solución de dicho sistema, entonces casi todos los puntos de la región considerada vuelven una infinidad de veces a un punto tan cerca como se quiera del punto del que partieron. Este teorema, cuya demostración no es especialmente complicada, fue generalizado más tarde por el mismo Poincaré a un sistema con cualquier número de variables. Hablando en un lenguaje menos técnico, lo que el teorema viene a decir es que cualquier sistema que cumpla dichas condiciones volverá, después de un tiempo suficientemente largo, pero finito, a un estado muy parecido al estado inicial.

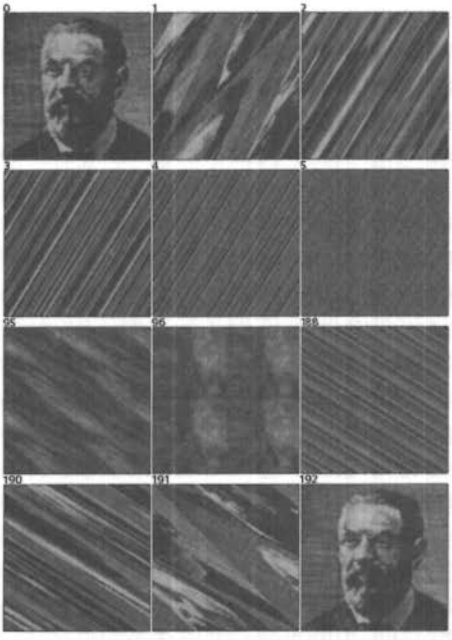
El teorema de recurrencia parece tener consecuencias sorprendentes y paradójicas. Por ejemplo, cabría deducir de él que el lector volverá a leer este libro en el futuro infinitas veces o, al menos, que leerá uno muy parecido. O, lo que es peor, que ya lo ha leído en el pasado, ¡y una infinidad de veces! Ello contradice el

UN EJEMPLO DEL TEOREMA DE RECURRENCIA: LA APLICACIÓN DEL GATO DE ARNOLD

Este conjunto de imágenes ilustra el teorema de recurrencia. En este caso, para pasar de una imagen a otra se usa no una ecuación diferencial, sino lo que los matemáticos llaman una aplicación, esto es, una regla definida para cambiar los píxeles que forman la foto de un sitio a otro. En concreto, aquí se usa una aplicación conocida como la aplicación del gato, que responde a la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = x_n + y_n \bmod(1)$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \bmod(1)$$

donde el contenido del píxel que se encuentra en la posición (x_n, y_n) en la iteración n-sima se transporta al píxel en la posición (x_{n+1}, y_{n+1}) en la siguiente iteración. El teorema de recurrencia también se aplica en estos casos. Vemos que el retrato de Poincaré se desdibuja tras varias iteraciones, y ya en la quinta parece totalmente perdido. Pero, sorprendentemente, se recompone en la iteración 192.



segundo principio de la termodinámica, según el cual cualquier sistema cerrado evoluciona irreversiblemente hacia estados de mayor entropía; esto es, el calor pasa de los cuerpos calientes a los fríos, las cosas que se rompen no se recomponen solas, el azúcar se disuelve en el café, etc. Si el teorema de Poincaré se aplicara en estas situaciones veríamos que, pasado suficiente tiempo, el calor volvería del cuerpo frío al cuerpo caliente, que las cosas rotas se recompondrían solas o que el azúcar se cristalizaría espontáneamente dentro del café. Esta contradicción entre el teorema de recurrencia y el segundo principio de la termodinámica ha sido motivo de debate y discusión entre físicos y matemáticos desde que Poincaré enunció tal idea por primera vez.

Los primeros en enfrentarse a esta contradicción fueron el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953) y el gran físico austriaco Ludwig Boltzmann (1844-1906). Este último fue uno de los fundadores de la mecánica estadística. Dentro del marco teórico de la mecánica estadística todos los procesos termodinámicos se explican como el resultado de la dinámica microscópica de las moléculas. Ello significa que el calor y todos los fenómenos relacionados con él no son más que una manifestación del movimiento microscópico de las moléculas que componen un cuerpo. Así, por ejemplo, la temperatura de un gas ideal está relacionada con la energía cinética promedio de las moléculas que lo componen. Boltzmann dedujo una expresión para la entropía de un sistema termodinámico a partir de sus propiedades microscópicas. Otro de sus grandes descubrimientos fue el conocido como «teorema H», en el cual definía una función de las coordenadas y velocidades de todas las partículas de un gas que evolucionaba irreversiblemente en el tiempo. Para Boltzmann este teorema era equivalente a una formulación mecánica del segundo principio de la termodinámica.

Boltzmann mantuvo una fuerte polémica con diversos científicos alemanes que negaban la existencia real de las moléculas y que defendían que el segundo principio de la termodinámica no podía tener una explicación mecánica. Josef Loschmidt (1821-1895), amigo personal de Boltzmann, fue el primero en apreciar una contradicción entre la irreversibilidad de la termodinámica y

la reversibilidad de la mecánica. Efectivamente, las ecuaciones de Newton de la mecánica son reversibles en el tiempo. Esto significa que tanto la solución que obtenemos con el tiempo hacia delante como con el tiempo hacia atrás son realizables en la práctica. Por ejemplo, si lanzamos una piedra, esta describe una parábola en el aire. La misma parábola, pero recorrida en sentido contrario, también es una trayectoria realizable. Pero el segundo principio de la termodinámica no es simétrico en el tiempo: la entropía aumenta con el tiempo y no hay procesos naturales realizables en los que la entropía disminuya con el tiempo. Loschmidt se preguntaba: ¿cómo es posible que las leyes reversibles de la mecánica den lugar a una ley irreversible como el segundo principio?

En su primer artículo sobre el tema, escrito en 1896, Zermelo hacía uso del teorema de Poincaré para plantear que «en un sistema de masas puntuales, una disposición particular de las masas, una vez dada, debe volver a darse». Si eso ocurría, cualquier función de las posiciones y velocidades de las masas consideradas debía volver a tomar el mismo valor inicial. Y concluía: «O bien el principio de Carnot-Clausius (el segundo principio de la termodinámica) o la visión mecánico-estadística de la naturaleza deben reformularse».

Boltzmann replicó inmediatamente a Zermelo en un artículo cuyo comienzo estaba cargado de ironía: «Este artículo demuestra que mis trabajos no han sido bien entendidos. Sin embargo, me hace feliz porque es la primera evidencia de que mi trabajo ha recibido atención en Alemania». Boltzmann propuso, principalmente, dos líneas de argumentación. Por un lado, admitió que su función H presentaría oscilaciones, momentos en los que la entropía, por tanto, podría disminuir, aunque la probabilidad de estos sucesos y su amplitud disminuye con el número de moléculas y se vuelve despreciable en el límite en el que ese número es infinito. Por otra parte, está la cuestión del tiempo, y este segundo argumento es el que más frecuentemente se aduce para resolver la paradoja. El teorema de Poincaré dice que el sistema volverá a un estado cercano al inicial, pero no dice cuándo. Intuitivamente se comprende que cuanto más grande sea el número de elementos que compongan el sistema,

mayor será ese tiempo. Boltzmann hizo algunos números en su respuesta a Zermelo y concluyó que, para que el gas contenido en un volumen de 1 cm^3 volviera a su estado inicial harían falta muchos millones de años.

Esta controversia, que normalmente se considera resuelta a favor de Boltzmann, no deja de ser, como el propio teorema, recurrente. Y de vez en cuando vuelven a aparecer en la literatura científica artículos sobre el tema.

UN ERROR QUE LLEVÓ MUY LEJOS

Tal y como ya se ha apuntado Lars Edvard Phragmén estaba encargado de revisar, para su publicación en *Acta Mathematica*, el trabajo de Poincaré que ganó el premio del rey de Suecia. Cuando todo ya estaba preparado para la publicación del artículo, Poincaré aún meditaba un comentario que Phragmén le había hecho y que le llevó a darse cuenta de que había cometido un error en sus cálculos. En una carta del 1 de diciembre de 1889 escribió a Mittag-Leffler poniéndole al corriente de la situación:

> Mi querido amigo: escribí al señor Phragmén para hablarle de un error que yo había cometido y sin duda él os ha comunicado mi carta. Pero las consecuencias de este error son mucho más graves de lo que había creído en un principio. [...] No le disimularé la pena que me causa este hallazgo. No sé de entrada si juzgarán todavía que los resultados que subsisten, a saber, la existencia de soluciones periódicas, la de soluciones asintóticas, la teoría de los exponentes característicos, la no existencia de integrales uniformes y la divergencia de las series de Lindstedt, merecen la alta recompensa que ustedes han tenido a bien concederme.

Poincaré citaba en esta carta los nombres técnicos de los hallazgos (de los cuales solo hemos discutido aquí una pequeña parte). El matemático francés se excusaba, pero también se reivindicaba. Mittag-Leffler respondió inmediatamente:

> No le oculto que quedé extremadamente perplejo cuando supe ayer por el señor Phragmén la noticia que usted le había comunicado. No dudo de que su memoria será en todo caso vista como la obra de un genio por la mayoría de los geómetras y que será un punto de partida para todos los esfuerzos que se hagan a partir de ahora en mecánica celeste. No crea que me arrepiento del premio, que ha sido dignamente asignado. Pero he aquí una gran desgracia. Su despacho ha llegado demasiado tarde y la memoria ha sido ya distribuida.

Efectivamente, el número correspondiente de *Acta Mathematica* estaba ya impreso. Para evitar un escándalo mayúsculo, y protegerse de los que ya le habían criticado por la forma en la que el premio se había otorgado, Mittag-Leffler propuso a Poincaré que escribiera un nuevo artículo con las modificaciones pertinentes y que él retiraría los ejemplares impresos de la circulación. Pero el matemático sueco necesitaba que Poincaré se hiciera cargo de los sobrecostes, cosa que Poincaré aceptó sin más. El dato curioso es que los costes de la segunda impresión eran de 3500 coronas, es decir, ¡mil coronas más que lo que iba a recibir por el premio!

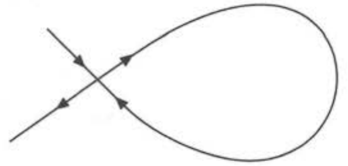
Finalmente, el artículo definitivo salió publicado en *Acta Mathematica* a principios de 1890. En la introducción, Poincaré reconocía que había corregido un error que contenía la memoria original, el cual había detectado gracias a una indicación de Phragmén. Pero, haciendo gala de la honradez y la sinceridad que le caracterizaron toda su vida, Poincaré también reconocía que estaba lejos de haber resuelto en su totalidad el problema que él mismo se había propuesto. Para los críticos con todo lo que tenía que ver con el premio, esto no daba sino más motivos para las suspicacias.

Pero volvamos a las matemáticas. ¿Cuál era ese error y cómo se resolvió? Poincaré había estudiado lo que él mismo llamó «trayectorias homoclinas». Estas son soluciones de las ecuaciones que salen y vuelven al mismo punto, tal y como muestra la figura 6.

En su formulación del problema de los tres cuerpos, el segundo de ellos tenía una masa muy pequeña y una de las técnicas que Poincaré introdujo era la de estudiar el sistema cuando esa masa era cero y ver después cómo se modificaban las soluciones si la masa se consideraba distinta de cero. Poincaré había definido para

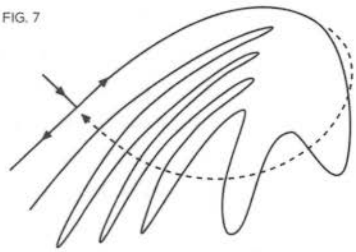
cada punto de equilibrio curvas que tendían hacia a este punto cuando el tiempo se hacía tender a infinito hacia delante o hacia atrás. Estas soluciones asintóticas coincidían a veces, en lo que se conoce como «trayectoria homoclina»: la misma curva que sale vuelve al punto de equilibrio. ¿Se mantendría esta trayectoria cuando la masa del planeta no fuera cero? En un principio Poincaré creyó demostrar que las dos curvas asintóticas seguían siendo la misma: que la homoclina se mantenía como tal. Pero el comentario de Phragmén le hizo darse cuenta de que estaba equivocado. Y él mismo encontró la verdadera respuesta: las dos curvas no coinciden, sino que se cortan una infinidad de veces.

FIG. 6



Homoclina sin perturbar

FIG. 7



Enredo homoclino

Durante los años posteriores Poincaré abordó la redacción de un gran tratado de mecánica celeste en el que retomó los problemas planteados en su ensayo inicial, los amplió y resolvió muchas otras cuestiones. El tratado se tituló *Los nuevos métodos de la mecánica celeste* y estaba compuesto por tres volúmenes que sumaban unas 1300 páginas. En el tercero de ellos, escrito en 1899, Poincaré retomó la cuestión de la homoclina y explicó su hallazgo con más detalle:

> Esta figura está formada por dos curvas y sus intersecciones en número infinito, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica. Estas intersecciones forman una especie de enrejado, de tela o malla infinitamente tupida; todas estas curvas no se cortan nunca consigo mismas, pero deben replegarse sobre sí mismas de manera muy compleja, para volver a cortar una infinidad de veces las fibras de la malla.

Poincaré se confesó incapaz de dibujar semejante gráfica, que hoy en día es conocida como «enredo homoclino» y cuya estructura detallada solo ha podido ser desvelada en la segunda mitad

del siglo XX gracias al advenimiento de los ordenadores. La figura 7 (pág. anterior) muestra un ejemplo esquemático de las dos curvas asintóticas y los primeros de sus infinitos cruces.

Este descubrimiento se avanzó a su tiempo. En la segunda mitad del siglo XX el uso de los ordenadores permitió descubrir propiedades de las ecuaciones diferenciales que hasta entonces no habían sido completamente comprendidas. Una de ellas es lo que se ha dado en llamar «caos determinista»: el hecho de que algunas soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales no lineales pueden comportarse de manera errática. El término «caos» se aplica a aquellas soluciones de ecuaciones que se comportan de forma caótica, aunque un estudio detallado revele cierta estructura subyacente. El calificativo «determinista» quiere expresar el hecho de que las leyes que gobiernan el sistema, expresadas en ecuaciones diferenciales, son bien conocidas y determinan su evolución de manera unívoca.

«Uno se queda impresionado por la complejidad de esta figura [la del enredo homoclino] que no intento siquiera dibujar. Nada es más apropiado para dar una idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos.»

— **Henri Poincaré**, ***Los nuevos métodos de la mecánica celeste.***

El error cometido por Poincaré y la forma en que fue corregido dio lugar a cierta controversia, sobre todo, como cabía esperar, en Alemania. A pesar de que Mittag-Leffler había intentado minimizar la importancia del error —y, en parte, también ocultarlo—, los hechos trascendieron. Poco después de la publicación del artículo de Poincaré, Weierstrass, que, al parecer, terminó arrepintiéndose de haber sido miembro del jurado, escribió a Mittag-Leffler: «Se ha debatido acaloradamente, con fundamento y no de la forma más amistosa, que en la memoria de Poincaré se han descubierto errores significativos, y de ahí la necesidad de revisar un párrafo bastante largo de lo que había sido escrito». Sin duda era difícil de entender que apareciera publicado un trabajo con la mención de «galardonado por el rey de Suecia» y que contuviera un apartado que no figuraba en el texto que había sido premiado.

CAOS EN EL SISTEMA SOLAR

El enredo homoclino descubierto por Poincaré es uno de los ejemplos conocidos de caos determinista. Las trayectorias que pasan cerca del punto de equilibrio se comportan de manera caótica. Es uno de los mecanismos que pueden conducir al comportamiento caótico de los planetas del sistema solar. El francés Jacques Laskar (n. 1955) es uno de los astrónomos que ha realizado minuciosas computaciones numéricas de la evolución del sistema solar a muy largo plazo y ha demostrado que su comportamiento es caótico, pudiendo darse el caso de que la trayectoria de Mercurio llegue a interceptar la de Venus o incluso la de la Tierra. Una característica del caos determinista es la sensibilidad a las condiciones iniciales, de forma que diferencias de tan solo un metro en la posición actual del planeta pueden llevar a trayectorias completamente diferentes en el futuro. Pero no es un asunto preocupante, puesto que ello solo podría ocurrir dentro de cientos de millones de años.

En cualquier caso, fue el propio Poincaré quien descubrió el error, quien lo admitió ante Phragmén y Mittag-Leffler y quien, finalmente, lo corrigió, haciendo entonces un descubrimiento mayúsculo, que dotaba a la memoria final de un valor superior al que ya tenía la inicial. De todas formas, la obtención del premio del rey de Suecia dio a Poincaré fama mundial y le convirtió en una de las personalidades más reconocidas de su país.

POINCARÉ LLORA A SU MADRE

La concesión del premio del rey de Suecia coincidió con el nacimiento de la segunda hija de Poincaré, Yvonne. El padre de Poincaré murió en 1892, y su madre, el 15 de julio de 1897. El matemático estaba muy unido a su madre y su muerte le afectó profundamente. En una carta escrita el 31 de julio a Mittag-Leffler, escribía:

> Mi querido amigo: las dolorosas circunstancias que acabo de atravesar van a forzarme todavía más a retardar la redacción de mi artículo sobre Weierstrass. [...] Iba a ponerme al trabajo cuando llegó la

UNA NUEVA FORMA DE PENSAR

La secuela del ensayo de Poincaré para el premio del rey de Suecia fue un trabajo publicado en tres tomos bajo el título de *Los nuevos métodos de la mecánica celeste*. Pero los métodos que Poincaré presentaba en su tratado trascendían el campo de la mecánica celeste, ya que eran aplicables a cualquier problema que se pueda formular en términos de ecuaciones diferenciales. Durante la segunda mitad del siglo XX los físicos y los matemáticos desarrollaron lo que se conoce de manera general como la teoría de sistemas dinámicos. Esta teoría proporciona una serie de herramientas matemáticas (analíticas, topológicas, geométricas y numéricas) que permite analizar de forma cualitativa y cuantitativa sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales. Varias de estas herramientas tienen su origen en los trabajos de Poincaré. Dada la generalidad de su planteamiento, hoy en día se aplican no solo a la mecánica celeste o a la física, sino también a la química, la biología o incluso la economía y la sociología.



Portada del tercero de los volúmenes que recogieron las lecciones de Poincaré sobre mecánica celeste.

desgracia. He querido retomarlo hace unos días pero no me siento todavía en condiciones de trabajar de forma continuada.

La amistad entre Mittag-Leffler y Poincaré quedó reflejada en estas cartas en las que, por debajo del tono formal y extremadamente cortés habitual en la época y en las formas epistolares francesas, se adivina una estrecha relación humana. Así, en la respuesta de Mittag-Leffler podemos leer: «Qué desgracia la que acaba de golpearos. No hace ni unas semanas que vi a vuestra madre en vuestra casa llena de vitalidad. Creed mi buen amigo en mi más vivo acompañamiento en vuestro dolor».

Mittag-Leffler le preguntaba también si le encontraría en Zúrich, en el primer Congreso Internacional de Matemáticas que se

iba a celebrar allí en agosto de aquel año. El congreso había sido organizado por Klein y el propio Mittag-Leffler, entre otros, y se esperaba que Poincaré pronunciara la conferencia inaugural bajo el título «Sobre las relaciones entre el análisis puro y la física matemática», pero Poincaré, todavía sin ánimo para ello, no acudió. Su ponencia fue leída por un matemático suizo, Jérôme Franel (1859-1939). Poincaré era ya una figura consagrada en el panorama internacional.

CAPÍTULO 4

¿Cuán unida está una esfera?

Poincaré está considerado uno de los fundadores de la topología. En una serie de artículos publicados entre 1895 y 1904, introdujo un conjunto de conceptos que hoy día son parte fundamental de esta disciplina. En el último de esos artículos enunció su famosa conjetura, que se convirtió en uno de los problemas de más difícil resolución de las matemáticas del siglo XX. A principios del siglo XXI fue demostrada por Grigori Perelman, un gran matemático con una personalidad muy peculiar.

Henri Poincaré puede ser considerado como uno de los últimos universalistas, ya que pertenece a esa selecta categoría de matemáticos que hicieron notables contribuciones en todos los campos. En su caso, ello se debe, en parte, a que su agudo ingenio le hacía ver las conexiones existentes entre problemas en apariencia muy diferentes. Así, como ya hemos visto en capítulos anteriores, encontró que la teoría de las ecuaciones diferenciales estaba relacionada con la geometría no euclídea. Otro de sus temas preferidos, el problema de los tres cuerpos, le llevó a reflexionar sobre la estructura general de las superficies multidimensionales, y ello, a su vez, le introdujo en el campo de la topología, del que nos ocupamos en este capítulo.

En el primer capítulo se explicó que la topología se encarga de estudiar los objetos desde un punto de vista más general que el de la geometría. La topología se pregunta si un objeto está compuesto de varias partes, si tiene agujeros, si se puede ir de un punto a otro por varios caminos distintos, etc. Los trabajos de Poincaré sobre ecuaciones diferenciales le hicieron ver la necesidad de estudiar a fondo todos estos conceptos y, lo que es más importante, generalizarlos a espacios de más de tres dimensiones. En 1895 Poincaré publicó un artículo en el *Journal de l'École Politechnique*, en el número conmemorativo del centenario de su antigua escuela. El artículo tenía 121 páginas y marcó un hito en

la historia de la topología. En él se presentaban numerosas ideas nuevas, sobre todo en el ámbito de las técnicas para abordar los problemas topológicos.

Además de enunciar varios teoremas nuevos, Poincaré comentaba resultados ya conocidos. Como ya le había ocurrido anteriormente, y, como por otra parte, resulta habitual en los trabajos científicos de primera línea, el artículo también contenía imprecisiones y algún error significativo. La comunidad matemática internacional, muy atenta ya a todo lo que venía de Poincaré, empezó a estudiar a fondo todo el material desde el mismo día de su publicación. Los comentarios y críticas y las peticiones de aclaraciones le llevaron a volver una y otra vez sobre el tema, y Poincaré escribió hasta cinco complementos al primer artículo. El último de ellos apareció en 1904 en la revista italiana *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* y tenía una extensión de nada más y nada menos que 66 páginas. Fue en este quinto complemento donde apareció el enunciado definitivo de lo que después se dio en llamar «conjetura de Poincaré», en el que el nombre del gran matemático francés quedó asociado para siempre a una de las grandes hazañas intelectuales del siglo XX.

El artículo del *Journal de l'École Politechnique* de 1895 llevaba por título «*Analysis situs*». En su introducción puede leerse:

> El *analysis situs* es la ciencia que nos da a conocer las propiedades cualitativas de las figuras geométricas no solamente en el espacio ordinario, sino en el espacio de más de tres dimensiones. El *analysis situs* de tres dimensiones es para nosotros un conocimiento casi intuitivo, el *analysis situs* de más de tres dimensiones presenta, por el contrario, dificultades enormes; es necesario, para superarlas, estar muy persuadido de la extrema importancia de esta ciencia.

Analysis situs es el nombre que algunos daban por entonces a esta rama de las matemáticas. Esta denominación perdería poco a poco preferencia en favor del uso de la actual denominación, topología. En su artículo, Poincaré definió dos conceptos fundamentales de la topología moderna: la homología y la homotopía. Ambos conceptos tenían precedentes.

LA HOMOLOGÍA

Vimos en el capítulo 1 que el suizo Simon L'Huilier había generalizado la ecuación de Euler

$$C - A + V = 2,$$

que relaciona el número de caras C, aristas A y vértices V de un poliedro. L'Huilier encontró que para un objeto con un número cualquiera de agujeros g se tiene que

$$C - A + V = 2 - 2g.$$

Al número g se le conoce como *género* de la superficie. El matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) y su amigo el italiano Enrico Betti (1823-1892) relacionaron g con la conectividad de la superficie en cuestión. Riemann definió la conectividad

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER

La fórmula de Euler $C-A+V=2$ se puede demostrar con relativa facilidad utilizando lo que los matemáticos llaman el principio de inducción, un principio que para Poincaré era especialmente importante por sus implicaciones filosóficas en cuanto a los fundamentos últimos de las matemáticas. El principio de inducción se puede expresar diciendo que si se cumplen las dos premisas siguientes:

a) Una propiedad es válida para un valor particular de n, por ejemplo $n=0$.

b) Suponiendo que la propiedad es válida para un número n cualquiera, podemos demostrar que también es válida para $n+1$,

entonces la propiedad en cuestión se cumple para todos los valores de n. En cuanto a la fórmula de Euler, ya vimos en el capítulo 1 que se cumple para el poliedro con $C=4$ caras, el tetraedro. Supongamos ahora que se cumple para un poliedro cualquiera con C caras, A aristas y V vértices. Elegimos una cualquiera de las caras y le añadimos una arista. El número de vértices permanece invariable, el número de aristas ha aumentado en uno y el de caras también, por lo que la fórmula sigue cumpliéndose para este poliedro, que ahora tiene $C+1$ caras.

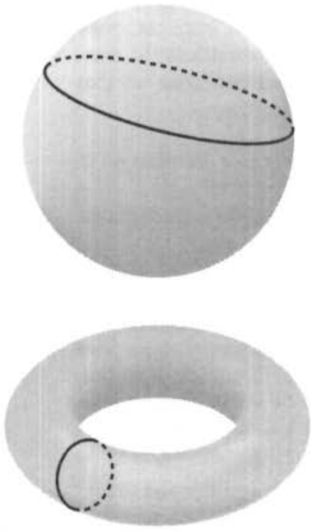
p de una superficie como el número más pequeño de lazos que se pueden dibujar sobre ella, de forma que inevitablemente la divida en dos. Para la esfera este número es 1, porque cualquier lazo que dibujemos sobre ella la divide en dos. Para el toro es 3, porque dos cortes no siempre bastan. En general se tiene que $p = 2g + 1$. Betti, por su parte, se dio cuenta de que g también se podía definir a partir del número *máximo* de lazos cualesquiera que *no* dividían la superficie. Este número es 0 para la esfera y 2 para el toro.

Poincaré generalizó las ideas de Betti a superficies de una dimensión cualquiera. A estas superficies, que pueden, a su vez, estar compuestas de distintas superficies conectadas o desconectadas, se les llama técnicamente *variedades*. Y ese es el término ya utilizado por Poincaré en sus trabajos. Para una variedad de dimensión m, Poincaré definió un conjunto de números p_k con $k = 1, \ldots, m-1$, que él denominó «números de Betti», de forma que p_k está relacionado con el número de agujeros de dimensión k de la variedad. Para definir de manera rigurosa los números de Betti Poincaré utilizó el concepto de homología.

Para una variedad de dimensión m, la homología considera si una curva, superficie o variedad de dimensión inferior la divide o no, y cómo lo hace. Es sencillo entender el concepto en una superficie bidimensional. Por ejemplo, en la figura 1 vemos que una línea cerrada sobre una esfera forma un contorno que encierra un trozo de ella; sin embargo, para un toro esto no siempre es así. Las homologías de un toro y de una esfera no son iguales, y tampoco lo son sus números de Betti, que aquí se reducen, esencialmente, a uno, que está relacionado con g. A partir de estos conceptos Poincaré fue capaz de definir un álgebra entre variedades de dimensión inferior a una dada (curvas, superficies, etc.) y construir lo que se conoce como el «grupo» de sus homologías.

Cualquier lazo que tracemos sobre una esfera la divide en dos zonas. Esto no ocurre siempre en el caso de un toro.

FIG. 1



Una forma muy útil de estudiar las superficies, y que se generaliza fácilmente a dimensiones superiores, es imaginarlas como construidas

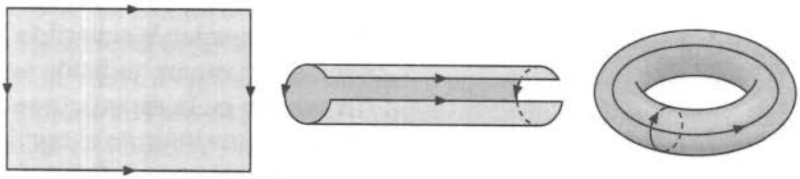


FIG. 2

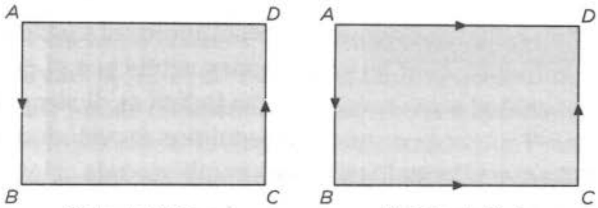


FIG. 3

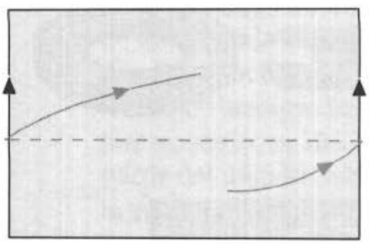
Cinta de Möbius Botella de Klein

a partir de piezas planas flexibles, por ejemplo, rectángulos cuyos lados se pegan unos a otros siguiendo unas reglas determinadas. El caso sencillo de un toro se muestra en la figura 2. Las flechas indican la orientación con la que debemos pegar los extremos del rectángulo. También se puede construir de esta manera una banda de Möbius o una botella de Klein.

En la figura 3 se representa simbólicamente la regla para obtener una banda de Möbius: hay que doblar la cinta sobre sí misma y pegar el vértice *A* con el *C* y el *B* con el *D*, haciendo coincidir los lados *AB* y *CD*. La botella de Klein es un poco más abstrusa. La primera operación es similar a la realizada para obtener el toro, pero la segunda implica una torsión similar a la de la banda de Möbius. Las flechas con sentido opuesto indican que hay que doblar la superficie antes de pegarla, de forma que la parte de adentro se convierte en la de afuera. La superficie resultante no se puede visualizar en el espacio ordinario de tres dimensiones, porque este doblado no es realizable en el espacio ordinario. Cualquier representación que hagamos en tres dimensiones parece dar a entender que es una superficie que se interseca consigo misma, pero la regla de construcción a partir del rectángulo muestra que esto no es así.

Las flechas dibujadas en cada lado nos indican si debemos girar o no ese lado antes de pegarlo con el lado correspondiente.

FIG. 4



Camino sobre una superficie bidimensional. Al salir por la derecha reaparecemos por la izquierda; las flechas indican que lo hacemos con la misma orientación.

Para entender cómo las reglas de pegado representan la superficie imaginemos que vamos andando por ella. Un camino en la superficie se representa por una línea en el rectángulo, tal y como muestra la figura 4. Cuando la línea llega a un contorno del rectángulo, el pegado significa que aparecemos por el otro lado. La flecha indica si, al atravesar el pegado, seguimos moviéndonos en la misma dirección o el pegado es tal que cambiamos la orientación de nuestro movimiento.

Cualquier superficie, orientable o no, se puede construir a partir de un polígono de n lados con las adecuadas reglas de pegado. Si en lugar de un polígono usamos un poliedro de varias caras y damos reglas de pegado identificando unas caras con otras, siguiendo un patrón determinado, el objeto resultante no es ya una superficie bidimensional, sino una variedad de tres dimensiones que solo puede existir en un espacio de cuatro, porque el proceso de doblar el poliedro para pegar una cara con otra requiere, en general, de una dimensión adicional.

En su artículo de 1895, y también en los escritos posteriores, Poincaré usó profusamente este método de construcción de variedades y ello le permitió definir los grupos de homología y calcular los números de Betti de diversas variedades tridimensionales ideadas por él.

El matemático danés Poul Heegaard (1871-1948), en un libro escrito en 1898, llamó la atención sobre algunos de los resultados obtenidos por Poincaré sobre los números de Betti, demostrando que no eran del todo generales. Ello llevó a Poincaré a retomar el tema en un primer complemento a su «*Analysis situs*», que apareció en 1899. En ese artículo el matemático francés afinó la definición de los números de Betti, dio una nueva demostración de un importante teorema e introdujo nuevos conceptos, entre ellos el de torsión de una variedad. Este concepto es una generalización del concepto de orientabilidad a espacios de dimensión mayor que 2.

Uno de los teoremas más importantes que Poincaré fue capaz de demostrar con todas estas técnicas fue la generalización de la fórmula de Euler a «poliedros» formados por variedades de cualquier dimensión. Para un poliedro en un espacio de n dimensiones la fórmula de Poincaré era la siguiente:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \ldots N_{n-1} = 1 - (-1)^n,$$

donde N_0 es el número de vértices; N_1, el de aristas; N_2, el de fronteras bidimensionales; N_3, el de fronteras tridimensionales, etc. Para $n = 3$ el lector puede comprobar que se obtiene la fórmula de Euler. La forma en que este teorema fue demostrado por Poincaré en 1895 se reveló incorrecta más tarde, aunque el teorema es cierto y fue rigurosamente demostrado por otros matemáticos.

HOMOTOPÍA

En «*Analysis situs*» Poincaré también construyó una forma intrínseca de definir la topología de una superficie diferente de la homología. Esta forma se denomina «intrínseca», porque permite estudiar la superficie desde dentro de la misma, de manera análoga a como los topógrafos determinaron en su día la forma de la Tierra haciendo medidas sobre su superficie. Lo que Poincaré definió se conoce como «grupo de homotopía» y para ello se inspiró en los trabajos previos de Gauss y Camille Jordan.

Consideremos primero el caso de una circunferencia e imaginemos un ser puntual que vive en ella y quiere explorar su mundo. Este ser tiene un hilo largo que va soltando a medida que anda. Puede comenzar a andar en una dirección y verá que al cabo del tiempo ha dado una vuelta y se encuentra en el mismo sitio del que partió. Si da dos vueltas, vuelve al mismo sitio, pero el hilo da dos vueltas sobre sí mismo. Si da una vuelta en un sentido y luego da otra en sentido contrario, es como si no se hubiera movido, porque está en el mismo sitio y ha recogido todo el hilo que había soltado. Podemos considerar positiva una dirección, por ejemplo, la horaria; y negativa la otra, por ejemplo, antihoraria. Dar cuatro vueltas

en una dirección es equivalente a dar cinco en esa dirección y una en dirección contraria. Tenemos así definida una serie de acciones, dar vueltas en un sentido o en otro, que podemos combinar.

Esta estructura forma lo que los matemáticos llaman «un grupo». Si combinamos dos de estas acciones, por ejemplo, dar tres vueltas en un sentido y luego dar dos en el mismo sentido, obtenemos otra de las acciones posibles: dar cinco vueltas. Además, hay una acción nula, dar cero vueltas, que podemos hacer después de cualquier otra sin alterarla. Por último, cada acción tiene una contraria: dar el mismo número de vueltas en dirección contraria, lo que nos deja en el mismo lugar. Esta estructura se conoce como «grupo de homotopía»; en este caso, el grupo de homotopía asociado a la circunferencia. Como el lector ha podido intuir este grupo es idéntico al de los números enteros: ...,–5, –4, –3, –2,–1, 0, 1, 2, 3, 4,... con la suma habitual, grupo que se conoce en matemáticas por el símbolo $\mathbb{Z}$. Y toda esta estructura se mantiene aunque la curva en la que viviera este ser imaginario no fuera una circunferencia, sino un lazo simple. Cualquier lazo simple se puede deformar para formar una circunferencia y su grupo de homotopía es el de los números enteros.

«La ciencia son hechos; de la misma manera que las casas están hechas de piedras, la ciencia está hecha de hechos; pero un montón de piedras no es una casa y una colección de hechos no es necesariamente ciencia.»

— Henri Poincaré.

Tomemos ahora otro ejemplo sencillo: el de una línea recta. Nuestro ser puntual imaginario puede ahora moverse sobre la línea hacia un lado o hacia otro, pero no puede dar una vuelta a nada. Como en topología podemos estirar y deformar los objetos, cualquier excursión de nuestro ser imaginario puede ser contrarrestada por un estiramiento o una contracción. En realidad, desde el punto de vista topológico, cualquier acción que haga este ser puntual es equivalente a quedarse en el mismo sitio. El grupo de ho-

motopía tiene ahora un solo elemento, que matemáticamente podemos identificar con el cero y que los matemáticos llaman el «grupo trivial».

Para un toro nuestro ser imaginario tiene dos formas de dar vueltas: una alrededor del agujero central y otra alrededor de una sección. Si volvemos a usar el hilo, este puede ahora enrollarse de dos maneras posibles y desenrollarse de las dos maneras. Tenemos entonces que cualquier acción se reduce a un par de números enteros (m, n), donde m y n son enteros que representan el número neto de vueltas que se dan en un sentido o en otro de las dos formas posibles. El grupo de homotopía del toro es, por tanto, el de los enteros repetido una vez, lo que los matemáticos escriben como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

El caso de una esfera de dos dimensiones en el espacio tridimensional es especialmente sencillo: cualquier camino cerrado puede deformarse continuamente hasta hacer de él un punto, por lo que cualquier camino que recorra nuestro ser imaginario es equivalente, topológicamente hablando, a no moverse. El grupo de homotopía de la esfera solo tiene un elemento, por lo que de nuevo es el grupo trivial, representable por el cero u operación identidad. Poincaré generalizó el concepto de homotopía a espacios de dimensión cualquiera y llamó al grupo de homotopía de una variedad el «grupo fundamental».

El matemático francés se interesó especialmente por el caso de la esfera de tres dimensiones. Una esfera en el espacio tridimensional se define por el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado, el centro de la esfera. En coordenadas cartesianas una esfera de radio unidad centrada en el origen viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

La esfera así definida es una superficie bidimensional, porque para situarnos sobre ella es suficiente con dar dos números, ya que la ecuación anterior proporciona la tercera coordenada del punto correspondiente. En geografía, por ejemplo, basta con dar la longitud y la latitud de un lugar para situarnos con precisión sobre la superficie terrestre.

En un espacio de cuatro dimensiones (x, y, z, w) podríamos definir una «hipersuperficie» por la ecuación

$$x^2+y^2+z^2+w^2=1.$$

Esta hipersuperficie resulta ser un objeto 3-dimensional, porque para situarnos sobre ella necesitaríamos dar tres números.

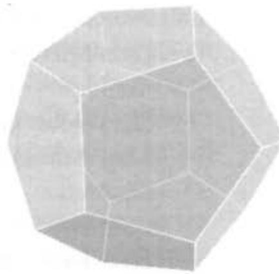
En su artículo de 1895 Poincaré creyó establecer que toda variedad de tres dimensiones que tenga el mismo grupo de homología que una esfera es topológicamente equivalente a una esfera. Es decir, que el grupo de homología de una variedad era suficiente para caracterizarla y determinaba también su grupo de homotopía. Pero poco después se dio cuenta de que las cosas eran más complicadas. En un segundo complemento a su «*Analysis situs*», publicado en 1900, enunció una primera versión de su conjetura: «Todo poliedro orientable con todos sus números de Betti iguales a 1 es simplemente conexo, es decir, homeomorfo a una hiperesfera» (la palabra «homeomorfo» significa aquí que se puede deformar de manera continua hasta conseguir una hiperesfera).

Pero en el quinto complemento, que como ya se ha comentado se publicó en 1904, se desdijo de esta afirmación, porque se había dado cuenta de que no era completamente general. En ese artículo Poincaré presentaba una superficie, construida pegando dos toros sólidos de una forma bastante complicada, que tenía el mismo grupo de homología que una esfera, pero que no era topológicamente equivalente a ella. En la introducción al artículo se decía:

> Podríamos preguntarnos entonces si la consideración de estos coeficientes es suficiente; si una variedad en la que todos los números de Betti y coeficientes de torsión son iguales a 1 es por ello simplemente conexa en el sentido propio del término, es decir, homeomorfa a la hiperesfera; o si, por el contrario, es necesario, antes de afirmar que una variedad es simplemente conexa, estudiar su grupo fundamental, que definí en el *Journal de l'École Polytechnique*.

Es decir, ¿bastaba la homología para definir una variedad o había también que estudiar su grupo de homotopía? El propio Poincaré respondía a esa pregunta con un contraejemplo:

EL DODECAEDRO DE POINCARÉ



La variedad que Poincaré construyó en su quinto complemento a su «*Analysis situs*» era un ejemplo de que la homología no era suficiente para determinar si una variedad *n*-dimensional es topológicamente equivalente a una *n*-esfera. La construcción de Poincaré es complicada de entender, pero veintiún años después de la muerte del gran matemático francés, Herbert Seifert y Constantin Weber demostraron que la misma variedad se podía construir a partir de un dodecaedro usando la técnica del pegado. El dodecaedro es uno de los cinco sólidos platónicos y consiste en un poliedro de doce caras todas ellas pentagonales (véase la figura). Para construir la variedad de Poincaré hay que unir cada cara con la que está opuesta a ella, pero antes de pegarlas hay que girar la cara lo justo para que un lado de una cara coincida con el de la cara opuesta. Esto hay que hacerlo con todas la caras, es decir, hay que realizar seis pegados. Como el interior del dodecaedro es un volumen de tres dimensiones, la variedad resultante es tridimensional. Obviamente, la operación de pegar todas las caras unas con otras no se puede realizar en el espacio ordinario. El dodecaedro de Poincaré solo existe en un espacio de cuatro dimensiones.

Podemos ahora responder a esta cuestión: he construido un ejemplo de variedad en la que todos los coeficientes de torsión y todos los números de Betti son iguales a 1 y, sin embargo, no es simplemente conexa.

Esta variedad tridimensional se conoce hoy en día como el dodecaedro de Poincaré, porque, tal y como demostraron Seifert y Weber varios años después de la muerte de Poincaré, se puede construir a partir de un dodecaedro, identificando las caras opuestas tras girarlas 36°.

Al igual que había pasado años antes con la memoria realizada para el premio del rey de Suecia, la corrección de un error inicial acabó también aquí transformándose en una aportación matemática de primera línea, muy avanzada en su tiempo. En este quinto

complemento Poincaré describió en detalle la construcción de su dodecaedro y demostró que su grupo de homotopía no es el trivial (en realidad, tiene 120 elementos) y, por tanto, no puede ser homeomorfo a una esfera. En la última página de este artículo figura la siguiente frase:

> ¿Es posible que el grupo fundamental de una variedad *V* se reduzca a la sustitución identidad y, sin embargo, *V* no sea simplemente conexa?

Este es el enunciado de la conjetura de Poincaré tal y como él mismo lo propuso. Expuesto en estos términos no era realmente una conjetura, sino una pregunta, y no tenemos razones para decidirnos a cuál de las dos respuestas (sí o no) daba Poincaré más opciones. El caso es que la afirmación positiva: «Toda variedad cuyo grupo fundamental es el trivial es simplemente conexa, es decir, homeomorfa a una hiperesfera» es la que los matemáticos pronto empezaron a valorar como cierta y lo que en realidad se debería haber llamado «el problema de Poincaré» pasó a llamarse su conjetura.

Después de unas líneas con una pequeña discusión muy técnica, el quinto complemento acaba diciendo: «Pero esta cuestión nos llevaría demasiado lejos». ¡Y tan lejos! Hizo falta un siglo de trabajo de algunos de los mejores matemáticos del mundo para resolverla.

LA RESOLUCIÓN DE LA CONJETURA

La expresión «variedad cuyo grupo fundamental es el trivial» significa que toda línea cerrada que tracemos sobre la variedad puede deformarse continuamente hasta reducirla a un punto. La conjetura de Poincaré se puede expresar, por tanto, diciendo que toda «superficie» n-dimensional que sea finita, no tenga fronteras y en la cual todo lazo pueda reducirse a un punto, se puede deformar continuamente hasta convertirla en una n-esfera. Por finita enten-

demos que la podemos encerrar en un recinto. Por ejemplo, una circunferencia es finita, ya que podemos encerrarla en un cuadrado, pero un plano o una línea recta no lo son. Y el que no tenga fronteras significa que no hay una línea o superficie más allá de la cual la superficie no existe. Por ejemplo, un toro o una esfera no tienen fronteras: si andamos sobre ellos no llegamos nunca a un borde. Pero una banda de Möbius, la superficie de una mesa o un disco sí tienen fronteras: en todas estas superficies hay una línea que, si se traspasa, se sale de la superficie.

La conjetura de Poincaré es claramente cierta para dos dimensiones, aunque una prueba de esta afirmación aceptable para un matemático puede tener un aspecto sorprendente para alguien no acostumbrado a las demostraciones. En cualquier caso, es algo que puede comprobarse dibujando. Y ahí se quedó todo durante la mayor parte del siglo XX. No se dieron nuevos avances hasta 1961, cuando el matemático americano Stephen Smale (n. 1930) demostró que la conjetura era cierta para espacios de dimensión mayor o igual a 7. La demostración de Smale usa técnicas puramente topológicas y parte de la idea de que un toro es topológicamente equivalente a una esfera a la que se la ha añadido un asa. Las ideas de Smale no se podían aplicar a espacios de menos dimensiones porque, hablando un poco tontamente, en estos «no hay sitio» para hacer las transformaciones necesarias. John Stallings (1935-2008) y Christopher Zeeman (n. 1925) superaron los problemas de Smale y demostraron la conjetura para seis y cinco dimensiones. Tomando un camino completamente diferente, en 1982 Michael Freedman (n. 1951) consiguió demostrar la conjetura para cuatro dimensiones.

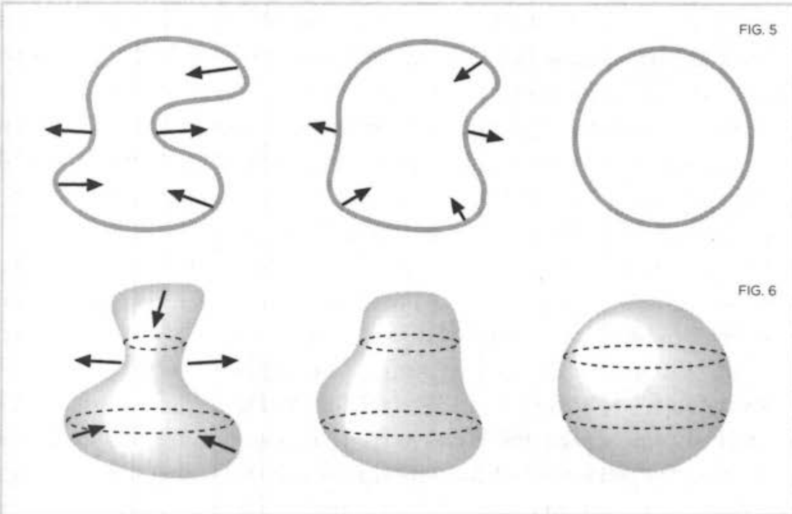
Y de nuevo vino el estancamiento. Todas las técnicas usadas para las dimensiones superiores eran inútiles para tratar el caso de dimensión tres. Esto es, el caso de una variedad, o «hipersuperficie» de tres dimensiones contenida en un espacio de cuatro dimensiones. El camino hacia la demostración de la conjetura en tres dimensiones vino por terrenos totalmente distintos a los usados en las dimensiones anteriores. Un camino que, a buen seguro, hubiera sido muy del agrado de Henri Poincaré: la geometría no euclídea. A lo largo de este libro ya hemos visto otra

conexión entre la geometría no euclídea y otras ramas de las matemáticas, ya que Poincaré la utilizó en su teoría de las ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 1 hablamos de las tres geometrías posibles en el espacio de tres dimensiones: la euclídea, cuya curvatura es cero; la elíptica, de curvatura positiva, y la hiperbólica, de curvatura negativa. Ejemplo de la primera es el plano, donde la línea más corta entre dos puntos es la recta, y los ángulos de un triángulo suman 180°. La geometría elíptica se da en una esfera, donde los círculos máximos son las líneas más cortas entre dos puntos y los ángulos de un triángulo suman más de 180°. Por último, la geometría hiperbólica es la de una superficie como una silla de montar, donde los ángulos de un triángulo suman menos de 180°. Cualquier superficie bidimensional se puede deformar, aunque sea por trozos, en una superficie que tenga uno de estos tres tipos de geometría. Esta idea fue el punto de partida de los trabajos del matemático americano William Thurston (1946-2012).

Thurston extendió esta clasificación a variedades de tres dimensiones y encontró que, en ese caso, hay ocho geometrías posibles: las tres habituales, algunas combinaciones de ellas y otras geometrías más exóticas. El siguiente paso era comprobar si cualquier variedad tridimensional era clasificable dentro de una de las ocho geometrías posibles, y ahí las cosas se volvieron complicadas. Thurston no resolvió del todo el problema, pero en 1982 lanzó lo que pasó a llamarse la conjetura de geometrización: «Toda variedad tridimensional admite una descomposición única en trozos, cada uno de los cuales corresponde a una de las ocho geometrías posibles». Y lo que es más importante para lo que nos ocupa: Thurston demostró que la conjetura de Poincaré era una consecuencia directa de su conjetura. Es decir, si su conjetura era cierta, también lo era la de Poincaré.

Nuestro siguiente protagonista es otro americano, Richard Hamilton (n. 1943), quien inventó lo que se conoce como «flujo de Ricci», la herramienta matemática que, en última instancia, llevaría a la demostración definitiva de la conjetura de Poincaré. El nombre de Ricci se refiere al matemático italiano Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), que introdujo el tensor que lleva su nombre



Flujo de curvatura en un lazo (fig. 5) y en una superficie con forma de pera (fig. 6).

en su contribución a la geometría no euclídea. El tensor de Ricci es un objeto matemático que caracteriza la curvatura de una superficie o un espacio no euclídeo. Es uno de los elementos que aparece en la ecuación de Einstein de la teoría general de la relatividad, que relaciona la curvatura del espacio-tiempo con su contenido en masa-energía.

Un concepto más sencillo, el flujo de curvatura, nos puede ayudar a entender el programa de Hamilton al inventar el flujo de Ricci. Supongamos que tenemos un lazo cerrado con una forma cualquiera. Empecemos a deformarlo de forma que aplastamos las zonas convexas a un ritmo proporcional a su curvatura, mientras que tiramos de las zonas cóncavas (figura 5). Poco a poco iremos alisando los salientes y reduciendo los entrantes hasta obtener una circunferencia. Podríamos hacer el proceso en dos dimensiones, como se muestra en la figura 6 y convertir poco a poco una superficie en forma de pera en una esfera. Parece intuitivo que, si aplicamos este tipo de flujo a una superficie cualquiera, obtendremos al final una esfera si y solo si la superficie de partida es topológicamente equivalente a una esfera.

El flujo de Ricci es, en cierta forma, una generalización de estas ideas a espacios de dimensión mayor que 2. Hamilton definió

la forma de proceder, pero pronto encontró dificultades: el flujo podía desarrollar singularidades, es decir, puntos donde la superficie colapsaba en un punto o el flujo divergía, y no estaba claro que estas singularidades fueran siempre manejables. Y es aquí cuando entra en escena el último héroe de esta historia: Grigori Perelman.

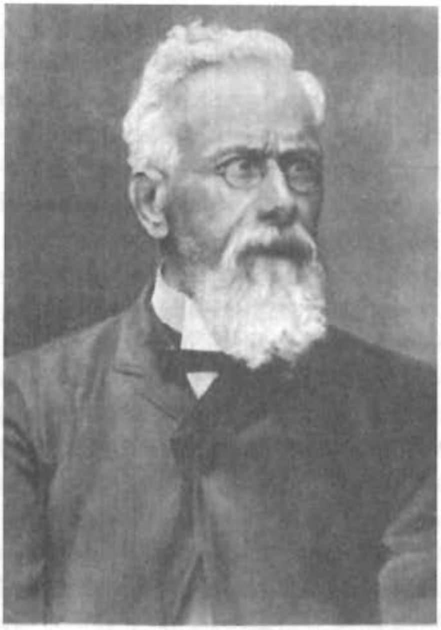
EL GENIO DE SAN PETERSBURGO

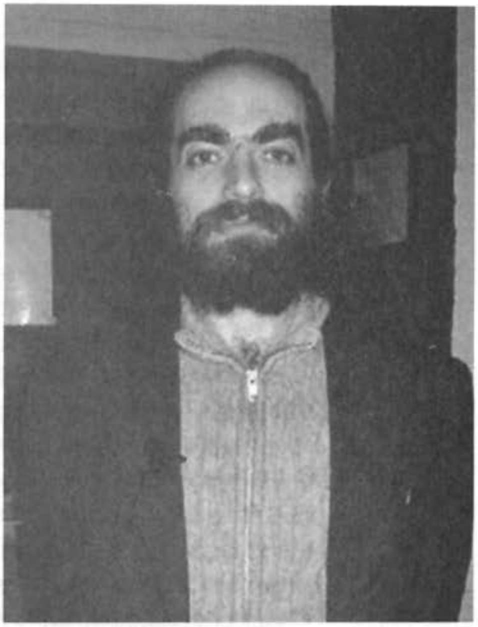
Grigori Perelman nació en 1966 en Leningrado (actual San Petersburgo). Con quince años obtuvo el primer puesto en las olimpiadas de las matemáticas de su ciudad y, después, de toda la URSS. Tras graduarse en la Universidad Estatal de Leningrado ingresó en el Instituto de Matemáticas Steklov, también ubicado en su ciudad natal, un centro que durante la época soviética fue uno de los mejores institutos de matemáticas del mundo. En este período trabajó con grandes matemáticos rusos, como Aleksandr Aleksandrov (1912-1999).

En 1992 Perelman consiguió una beca para realizar una estancia en el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de Nueva York. Allí conoció a Gang Tian (n. 1956), con quien a menudo alquilaba un coche para ir a Princeton o Stony Brook con el fin de asistir a las conferencias de los mejores matemáticos del mundo. En una de estas conferencias, Perelman conoció a Hamilton y mantuvo una conversación con él sobre los flujos de Ricci y sus ideas para demostrar la conjetura de Poincaré.

Tras tres años en diversos centros de Estados Unidos, varias universidades ofrecieron a Perelman un puesto de profesor. Pero un día cayó en sus manos un artículo de Hamilton y se dio cuenta de que este se había atascado en su trabajo sobre la conjetura de Poincaré. Le escribió ofreciéndose a colaborar, pero Hamilton no respondió, con lo que entendió que podía trabajar solo en el problema.

Perelman decidió entonces rechazar todas las ofertas y volver a San Petersburgo, ya que necesitaba tiempo y tranquilidad para





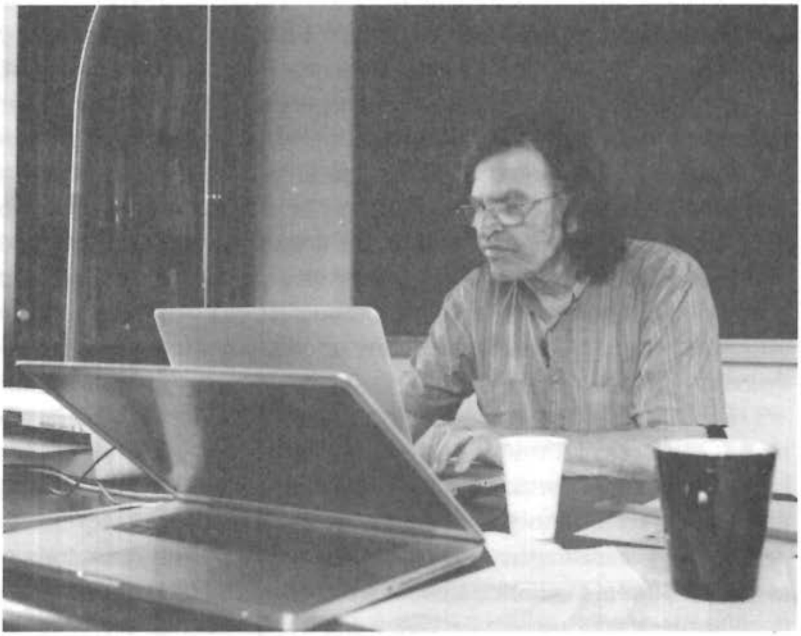


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Fotografía de Enrico Betti. Poincaré partió de los trabajos de este matemático italiano en sus estudios de topología .

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Grigori Perelman, quien finalmente demostró la conjetura de Poincaré.

FOTO INFERIOR:
William Thurston, quien estableció la conjetura de geometrización, que también fue demostrada por Perelman.

trabajar. A su vuelta a su ciudad natal, su padre se había marchado a Israel, a donde pronto le siguió su hermana, así que se quedó solo con su madre. Vivían los dos en diferentes apartamentos del mismo barrio. Perelman, que oficialmente era miembro del Instituto Steklov al que presentaba informes puntualmente, se encerró a trabajar en su casa, relacionándose solo con algunos colegas del instituto.

En julio de 2000 el Instituto Clay de Matemáticas anunció los premios a los problemas del milenio. Este centro había sido fundado en 1998 por un multimillonario norteamericano, Landon Clay, con la idea de contribuir al progreso de las matemáticas. En el año 2000 varios matemáticos eligieron una lista de siete problemas, los problemas del milenio, y el instituto anunció una recompensa de un millón de dólares por la resolución de cada uno de ellos. La conjetura de Poincaré estaba en la lista.

A estas alturas Perelman llevaba ya cinco años trabajando en ello. Solo salía a pasear y a algún concierto de música clásica. El 11 de noviembre de 2002 envió a la web arXiv.org un trabajo titulado *The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications* («La fórmula de la entropía para el flujo de Ricci y sus aplicaciones geométricas»). Todo en Perelman era especial, porque lo habitual en la comunidad científica hubiera sido enviar un trabajo de semejante calado a una revista científica reconocida. Es cierto que, a veces, se cuelga en arXiv.org una primera versión de un trabajo importante, con la intención de publicarlo después en una revista reconocida. Pero en el caso de Perelman él envió a arXiv.org el trabajo definitivo, que no envió a ningún sitio más. De hecho, su artículo sigue disponible íntegramente para todos, aunque en realidad muy poca gente en el mundo puede entenderlo.

El artículo tiene 40 páginas y está firmado por Grisha Perelman (Grisha es el diminutivo de Grigori en ruso). A pie de página hay una nota que contiene esta singular aclaración:

> Me he financiado parcialmente con los ahorros acumulados durante mis visitas al Instituto Courant en otoño de 1992, al SUNY en Stony Brook en la primavera de 1993 y a la Universidad de California en

Berkeley como *Miller Fellow* en 1993-1995. Quisiera expresar mi agradecimiento a todos los que trabajaron para darme estas oportunidades.

El texto inicial fue seguido por dos complementos más en marzo y julio de 2003, en los que se aclaraban y extendían algunos conceptos. En estos tres artículos Perelman presenta su teoría general para resolver las singularidades del flujo de Ricci y completar el programa de Hamilton, demostrando la conjetura de geometrización de Thurston y, en consecuencia, la conjetura de Poincaré. En realidad, los resultados presentados van más allá de la demostración de la conjetura de Thurston. Son trabajos especialmente difíciles, ya que hacen uso de campos muy diferentes de las matemáticas. Y, curiosamente, en ninguno de ellos se nombra a Poincaré ni a su conjetura.

Gang Tian, su colega del Instituto Courant, llevaba siete años sin oír hablar de él cuando, de buenas a primeras, recibió un correo electrónico de Perelman, en el que le contaba sus progresos y le explicaba que había publicado sus resultados en arXiv.org. Tian invitó a Perelman a Estados Unidos para dar charlas sobre su trabajo, invitación que Perelman, deseoso de discutir e intercambiar ideas con sus colegas, aceptó inmediatamente. De esta forma, Perelman volvió a Estados Unidos en 2003, invitado a dar charlas y seminarios en las mejores universidades del país. Él no aceptaba cámaras, ni periodistas, ni grabaciones. De hecho es relativamente difícil encontrar imágenes suyas en internet. En las charlas no nombraba la conjetura siquiera, porque era solo uno de los corolarios de su teoría.

Durante este viaje varias universidades volvieron a ofrecerle un puesto de profesor, pero Perelman rechazó todas las ofertas y regresó de nuevo a San Petersburgo. La comprobación de que Perelman había demostrado la conjetura de Poincaré llevó años, porque nadie tenía conocimientos lo suficientemente profundos en campos tan diferentes como para diseccionarla. La comunidad matemática internacional está bastante acostumbrada a que alguien anuncie la demostración de un teorema famoso y después la demostración sea falsa o incompleta, incluso cuando el que hace

el anuncio es un matemático de reconocida valía, como era el caso de Perelman. Por ello los máximos expertos mantuvieron un sano escepticismo, mientras diseccionaban punto por punto los trabajos del matemático ruso.

«No me interesa la geometría, me interesa la moral.»

— Aleksandr Aleksandrov, matemático ruso profesor de Perelman.

Pero Perelman pareció cansarse de esperar y en diciembre de 2005 dimitió de su instituto, en un gesto que solo se podía interpretar como que abandonaba las matemáticas. En 2006 los dos grupos que trabajaban independientemente en la comprobación de la teoría de Perelman anunciaron que la prueba era correcta y el nombre de Perelman saltó a los periódicos de todo el mundo. Pero también saltó un escándalo. Dos matemáticos chinos anunciaron que Perelman solo había hecho una parte del trabajo, un 25%, y que ellos habían terminado la demostración. Perelman respondió a estas insinuaciones diciendo que los matemáticos chinos, en realidad, no habían entendido su trabajo y que no aportaban nada nuevo.

En el mismo año la Unión Matemática Internacional otorgó a Perelman la medalla Fields, el más importante galardón mundial en el campo de las matemáticas. Esta medalla se otorga cada cuatro años a cuatro matemáticos menores de cuarenta años. Pero Perelman rechazó el premio. A estas alturas ya parecía creer que todo estaba corrupto y que los matemáticos rusos no le defendían suficientemente. Los años de espera y el asunto de la autoría, que los chinos habían puesto en duda, habían hecho mella en su ánimo probablemente. Para Perelman las matemáticas no eran solo la primera de las ciencias, sino también una ciencia moral.

Las medallas Fields del año 2006 se entregaron en el Congreso Internacional de Matemáticas de Madrid. El rey Juan Carlos I de España entregó las medallas. Los otros tres matemáticos premiados recibieron solemnemente las suyas y hablaron sobre sus logros en ponencias plenarias, pero Perelman no apareció. Cuando el presidente de la Unión Matemática Internacional anunció su

nombre y admitió que, lamentablemente, el gran matemático ruso había declinado asistir y rechazaba el premio, hubo un momento de desconcierto entre los asistentes, que no sabían si aplaudir o guardar silencio.

A partir de entonces Perelman rompió con todos. Ya no contestaba los correos electrónicos. John Morgan (n. 1946) y su antiguo colega Gang Tian, dos de los expertos que habían estado estudiando su trabajo, publicaron un libro con sus conclusiones y le enviaron un ejemplar para que lo evaluase. Perelman les devolvió el libro sin abrirlo.

El Instituto Clay tardó hasta el año 2010 en hacer pública su conclusión definitiva: la prueba de la conjetura de Poincaré era correcta y su autor era Perelman y nadie más. En el comité que había estudiado la situación estaban todos los grandes expertos mundiales sobre el tema. El instituto concedió a Perelman el millón de dólares del premio del milenio.

Pero habían pasado ocho años desde que Perelman envió su artículo a internet. Perelman respondió que tenía que pensárselo, y tardó unos meses en responder. El 1 de julio de 2010 rechazó definitivamente el premio, porque no le parecía justo. Parece ser que Perelman pensaba que Hamilton también era merecedor del premio y, en cualquier caso, no estaba de acuerdo con la comunidad matemática, ya no se sentía parte de ella.

A lo largo de toda su carrera Perelman huyó de las cámaras y de los periodistas. No quería notoriedad ni fama. Paradójicamente su actitud le convirtió en un personaje mediático. Ninguno de los otros tres galardonados con la medalla Fields en Madrid en 2006 es conocido por el gran público. Son personas respetadas por su trabajo dentro de la comunidad matemática, pero pasan desapercibidos fuera de ella. Justo lo que Perelman hubiera querido para sí mismo. Pero su negativa a aceptar el premio, y más aún, su negativa a aceptar el premio del milenio, le convirtieron en un mito. Algunos ven en sus gestos un desafío al *establishment*, otros un gesto anticapitalista, otros la reivindicación de una forma romántica de hacer matemáticas, muchos lo ven simplemente como la acción de un loco extravagante. Lo único cierto es que el mundo de las matemáticas perdió con todo ello a uno de sus mayores genios.

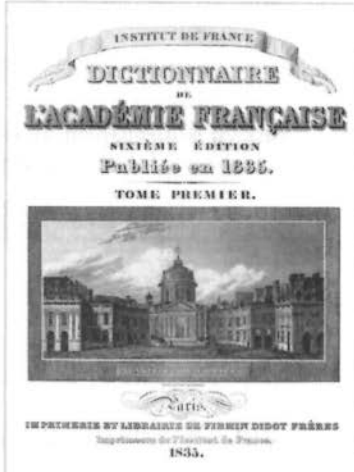
POINCARÉ FIGURA PÚBLICA

Desde 1881 hasta el final de su vida, Poincaré vivió en París. Aparte de su actividad científica y universitaria tuvo una activa vida social y conocía y frecuentaba a lo más granado de la sociedad parisina. Por ejemplo, conoció a la divulgadora del psicoanálisis en Francia, Marie Napoleón, hija de Roland Bonaparte y nieta de François Blanc, el fundador del Casino de Montecarlo. Roland era un científico que llegó a presidir la Sociedad de Geografía y la Academia de Ciencias. De hecho, su palacio en el número 10 de la Avenue d'Iéna fue la sede de la Sociedad de Geografía y es hoy un gran hotel. Poincaré cenó en esa casa varias veces, a la que acudían intelectuales y artistas de la época. Las cartas de Marie Napoleón a Poincaré dejan constancia de la admiración que ella sentía por el gran matemático francés.

Con tan solo treinta y dos años, en enero de 1887, Poincaré fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias, en su sección de geometría. Como suele ser habitual en este tipo de instituciones, el número de académicos es fijo y solo se puede optar a una plaza cuando se ha producido una vacante, normalmente por deceso. Los miembros de la Academia son elegidos entre los candidatos propuestos por votación de los miembros activos. El matemático Edmond Laguerre, que había sido uno de los profesores de Poincaré en la Politécnica, murió en agosto de 1886, dejando vacante su puesto en la Academia. Para reemplazarle se postularon Poincaré, Mannheim, Appell, Goursart, Humbert y Picard. Mannheim había sido profesor de Poincaré en la Politécnica y era mucho mayor que él —Poincaré había tenido algunos problemas con él por sus calificaciones en dibujo durante su época de estudiante—. A la votación decisiva llegaron Poincaré y Mannheim. Poincaré salió elegido por 31 votos frente a los 25 de su rival. Una vez más Hermite, que era el decano de la sección de geometría, había sido el mentor de Poincaré en esta elección. Tanto Appell como Picard, los otros protegidos de Hermite, fueron elegidos para la Academia, en la misma sección, poco después. Picard lo fue en 1889 y Appell en 1892. Lo que para muchos científicos era un reconocimiento por toda su carrera que se obtenía en la etapa ya madura de su vida

LA ACADÉMIE FRANÇAISE

La Academia Francesa fue fundada en 1635 por el cardenal Richelieu durante el reinado de Luis XIII de Francia. El cometido de la Academia es establecer las reglas por las que se rige la lengua francesa, así como promover su desarrollo. La Academia consta de cuarenta miembros, que ocupan su puesto de manera vitalicia. A la muerte de un académico se elige a su sustituto por votación de los demás académicos. Sus miembros son conocidos como *los inmortales*, aunque este sobrenombre se debe a que el lema de la Academia es «A la inmortalidad» y se refiere, lógicamente, a la lengua francesa, y no a los académicos. A la Academia han pertenecido no solo grandes poetas, filósofos y escritores franceses, sino también muchos científicos, como es el caso de Poincaré. La Academia Francesa sirvió de modelo para la fundación de instituciones similares en otros países europeos.



Portada de la sexta edición del diccionario de la Academia Francesa, que fue publicada en 1835.

intelectual, para Poincaré llegaba cuando todavía no había culminado ni la mitad de su ingente producción científica.

En 1896 Poincaré accedió a la cátedra de Astronomía Matemática y Mecánica Celeste. En 1906 fue elegido presidente de la Academia de Ciencias y en 1908 miembro de la Académie Française, el equivalente de la Real Academia Española de la Lengua. Para entonces los escritos de Poincaré habían trascendido el ámbito de la física y las matemáticas para adentrarse también en el terreno de la filosofía. La Academia Francesa es una institución más exquisita, si cabe, que la Academia de Ciencias, ya que solo consta de cuarenta miembros, cuyo cometido es establecer las reglas de uso de la lengua francesa. La elección de Poincaré no fue un hecho excepcional para la Academia, porque, como él mismo se encargó de señalar en su discurso de aceptación, la Academia solía contar

entre sus miembros con científicos de primera línea para que aportaran su conocimiento en la labor de admitir nuevos vocablos dentro de la lengua. Con su nombramiento Poincaré se unió a la lista de científicos que habían formado parte de la Academia, como D'Alembert, Bertrand o Pasteur. Sí es más llamativo que Poincaré viniera a sustituir a un poeta, Sully Prudhomme, a quien dedicó su discurso de entrada en la Academia.

CAPÍTULO 5

Poincaré y la teoría de la relatividad

Henri Poincaré puede ser considerado, junto con Hendrik Lorentz y Albert Einstein, uno de los fundadores de la teoría especial de la relatividad. Su interés por los problemas asociados a la teoría del electromagnetismo, en particular a la teoría de Lorentz, le llevaron a reformular los principios de la mecánica. Por otra parte, sus reflexiones sobre la inexistencia del espacio absoluto y sus escritos sobre la naturaleza del tiempo dejaron una notable huella en el joven Einstein.

Henri Poincaré era un hombre de costumbres regulares. Desayunaba a las ocho, almorzaba a las doce y cenaba a las siete. Como él mismo contaba en *La ciencia y el método*, no solía tomar café después de cenar. Se acostaba a las diez y se levantaba a las siete de la mañana. Le gustaba pasear, pero no hacía otro tipo de ejercicio. Ni era fumador ni le gustaba que la gente fumara. Medía 1,65 m y, hacia 1909, pesaba unos 70 kg. Conocemos estos detalles porque el doctor Étienne Toulouse, director del laboratorio de psicología experimental de la École des Hautes Études de París, realizó un estudio psicológico del personaje. Por él también sabemos que, aunque fue religioso en su infancia y adolescencia, dejó de ser creyente cuando tenía dieciocho años. Simpatizaba con las ideas políticas de su primo Raymond Poincaré, un conservador moderado, pero mantenía posiciones progresistas en temas como la educación o la participación de la mujer en la vida política. Desconfiaba de la Iglesia católica por sus posiciones anti-intelectuales y su continuo interés en influir en la vida social y política del país. Quizá como consecuencia de la guerra franco-prusiana siempre mantuvo una posición patriótica. Ello no le impidió mantener un intercambio franco y abierto con los científicos alemanes de su época, pero, si podía, prefería citar o resaltar los méritos de sus colegas franceses. Poincaré era un claro exponente de lo que podríamos llamar «la moral laica» de la República Francesa. Para

él, la honradez, la sinceridad, la lealtad, el servicio a la sociedad y la búsqueda del bien común eran valores supremos y universales.

DEBER DE FUNCIONARIO: EL CASO DREYFUS

Como servidor del Estado que era, Henri Poincaré se vio tangencialmente envuelto en el caso Dreyfus, un asunto que dividió profundamente a la sociedad francesa del cambio de siglo. Alfred Dreyfus (1859-1935) era un capitán del ejército francés de origen judío que, en 1893, había sido destinado al Estado Mayor. Su nombramiento no estuvo exento de polémica, ya que el antisemitismo estaba presente entre la jerarquía militar francesa de la época, como lo estaba, en general, en toda Europa. Su candidatura fue rechazada, en primera instancia, por el hecho de ser judío. Dreyfus presentó una protesta formal y, finalmente, fue admitido para el puesto.

La guerra franco-prusiana había dejado huella en el estamento militar francés y a finales de siglo se organizó un servicio de espionaje y contraespionaje cuyo objetivo principal era obtener información del ejército alemán y facilitarle información falsa. En este contexto los espías franceses encontraron en 1894 un documento, con información clasificada del ejército francés, entre las pertenencias de un oficial alemán adscrito a la embajada alemana en París. Como la información tenía que venir del Estado Mayor, las sospechas recayeron en el personal allí destinado. Sin haberse realizado una verdadera investigación, Dreyfus, que además era alsaciano, la región que estaba en el centro del conflicto con Alemania, fue acusado de aquel delito sin más pruebas que su origen y su carácter, más bien reservado. El asunto tomó un cariz esperpéntico cuando se compararon la caligrafía de la nota interceptada y la de Dreyfus. Aunque había diferencias sustanciales, el comandante Du Paty de Clam dio por sentado que el autor de la nota era Dreyfus y así lo comunicó al general Mercier. Este, a su vez, encargó al famoso policía Alphonse Bertillon que estudiara en detalle ambas caligrafías. Bertillon, ante las claras diferencias entre

la escritura de Dreyfus y la nota interceptada, inventó la teoría de que Dreyfus había cambiado su escritura conscientemente para que no pudiera acusársele.

Dreyfus fue juzgado y condenado por alta traición. Se le despojó de todos sus grados militares y fue deportado, en principio de por vida, a una prisión militar en la Guayana Francesa. Inmediatamente su hermano Mathieu y su familia iniciaron una campaña para probar su inocencia. En 1896 el teniente coronel Picquart descubrió al verdadero culpable, Ferdinand Walsin Esterhazy, que, acuciado por las deudas que su aristocrático ritmo de vida le generaban, había estado vendiendo información a los alemanes. Esterhazy, de origen noble, era un hombre resentido con Francia y los judíos. En lugar de ser recompensado por su investigación, Picquart fue destinado a Túnez por el Estado Mayor, en un intento de mantenerle apartado del caso. Pero la persistencia de la familia de Dreyfus y del propio Picquart consiguió el favor de parte del

ÉMILE ZOLA: «J'ACCUSE»


L'AURORE

J'Accuse...!

LETTRE AU PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE

Par ÉMILE ZOLA

La absolución de Esterhazy, el verdadero culpable de los delitos de los que se acusaba a Dreyfus, llevó al escritor Émile Zola (1840-1902) a publicar en el diario *L'Aurore* en enero de 1898 una carta abierta al presidente de la República. En ella denunciaba las irregularidades del caso y acusaba a los militares involucrados de urdir pruebas falsas y de condenar a Dreyfus a sabiendas de su inocencia. Zola fue juzgado y condenado por ello, y se exilió a Londres. Pero su carta abierta ahondó en la división de la sociedad francesa. La derecha católica, el clero y los estamentos militares se alinearon contra Dreyfus y llegaron a producirse manifestaciones multitudinarias en París contra él. La misma absolución de Esterhazy fue recibida con alborozo por una masa de seguidores antisemitas. En el otro bando, estaban los radicales y la izquierda en general.

senado y de una parte de la, cada vez más polarizada, opinión pública. En enero de 1898 Esterhazy fue arrestado, juzgado por un tribunal militar y, sorprendentemente, absuelto.

«Yo acuso a los tres expertos grafólogos de haber redactado informes falsos y fraudulentos, a menos que un tribunal médico les declare afectados por una enfermedad de la vista y del juicio.»

— **Émile Zola en la carta abierta al presidente de la República publicada en el diario *L'Aurore*.**

Ante la acumulación de evidencias favorables a Dreyfus el caso se reabrió y se celebró un segundo juicio en Rennes en septiembre de 1899. El matemático Paul Painlevé (1863-1933) se encontraba entre los convencidos de la inocencia de Dreyfus, y se prestó a declarar en el nuevo juicio. Painlevé, por otra parte, era amigo del gran matemático Jacques Hadamard (1865-1963), quien también se implicó en el caso. Hadamard, que también era de origen judío, tenía vínculos familiares con Dreyfus, ya que su padre y el padre de la esposa del militar eran primos.

Una de las líneas argumentales de la defensa de Dreyfus era la inconsistencia del informe del jefe de policía Bertillon, que había afirmado que el militar era el autor de la nota interceptada comparando el texto de este escrito con la caligrafía de Dreyfus. Aunque Bertillon era un pionero en la incorporación de técnicas científicas a la investigación policial, no era un científico profesional y había incluido en su argumentación cálculos de probabilidad que eran claramente erróneos. Painlevé pidió a Poincaré, que como ya se ha mencionado había sido catedrático de Física Matemática y Probabilidades en la Sorbona, un informe en que desmontara los argumentos de Bertillon. De esta forma, Painlevé, cuya amistad con Hadamard era conocida por el tribunal, evitaba presentar sus propias conclusiones, y aprovechaba el prestigio incontestable de Poincaré para defender su causa. En el juicio de Rennes, Painlevé leyó una carta escrita por Poincaré en la que este explicaba los detalles del cálculo de probabilidades aplicado a la comparación

de los documentos en cuestión. Al inicio de la misma el matemático dejaba clara su neutralidad en el asunto que se juzgaba:

> Mi querido amigo, me pide usted mi opinión sobre el sistema Bertillon. Sobre el fondo del asunto, claro está, no me pronuncio. No tengo luces y no puedo sino remitirme a aquellos que tienen más que yo. Tampoco soy grafólogo, y no he tenido tiempo de verificar las medidas realizadas. Ahora bien, si usted quiere saber solamente si, en los razonamientos en los que el señor Bertillon aplica el cálculo de probabilidades, esta aplicación es correcta, puedo darle mi opinión.

A continuación Poincaré desmontaba el cálculo realizado por Bertillon, explicando que este había aplicado incorrectamente las leyes de la probabilidad. El matemático concluía su carta diciendo:

> No sé si el acusado será condenado, pero si lo es, lo será en base a otras pruebas. Es imposible que una argumentación como esta [la presentada por los acusadores] haga impresión alguna sobre hombres sin un partido tomado de antemano y que hayan recibido una sólida educación científica.

Si los miembros del jurado habían recibido una sólida educación científica lo ignoramos, pero parece claro que tenían el veredicto tomado de antemano, porque Dreyfus fue, de nuevo, declarado culpable.

Dreyfus apeló al presidente de la República, por entonces Émile François Loubet, que le otorgó el indulto ese mismo año. La familia y los partidarios de Dreyfus siguieron luchando por lograr su total rehabilitación, y en 1904 el caso fue estudiado de nuevo por el Tribunal de Casación. Entre otras actuaciones, este tribunal solicitó a Poincaré, Appell (que entonces era decano de la Facultad de Ciencias) y Darboux (secretario permanente de la Academia de Ciencias) un informe pericial sobre las pruebas de grafología que se habían usado en los juicios anteriores.

El porqué de la elección de Poincaré tiene varias explicaciones. Si en 1899 Poincaré ya tenía un alto estatus en la ciencia francesa, su posición en 1906 era indiscutible. Durante diez años había sido

catedrático de Probabilidad y Física Matemática, siendo autor de un tratado sobre probabilidades que era utilizado en toda Francia. Además era conocido por el público en general. El informe que los tres matemáticos remitieron al tribunal tenía unas cien páginas y consistía en un análisis detallado de los informes grafológicos previos. Todo parece indicar que fue escrito, en su mayor parte, por Poincaré, ya que en este documento se mantienen las tesis fundamentales planteadas en la carta a Painlevé.

Una buena parte del escrito parece más bien un tratado sobre la teoría de probabilidades, ya que en él se explican en detalle los conceptos de esta rama de las matemáticas relevantes para el caso. Aunque el informe entraba de lleno en los detalles técnicos de los cálculos presentados por la acusación, también hacía algunas consideraciones de contenido moral que dan una idea de los valores humanos que defendían sus autores. Para poder hacer el cálculo era necesario saber la probabilidad *a priori* de que ocurrieran coincidencias en la caligrafía (hay que recordar que Bertillon acusaba a Dreyfus de tratar de falsear su propia letra), cosa realmente imposible de saber, por lo que los autores del informe manifestaban:

> Ahora bien, esta probabilidad *a priori*, en cuestiones como esta que nos ocupa, está únicamente formada de elementos morales que escapan absolutamente al cálculo, y si, como acabamos de ver, no podemos calcular nada sin conocerla, todo cálculo resulta imposible. Por eso, Auguste Comte dijo con toda razón que la aplicación del cálculo de probabilidades a las ciencias morales era un escándalo para las matemáticas. Querer sustituir los elementos morales por cifras es tan peligroso como vano.

Esta afirmación de Poincaré no debería pasarnos desapercibida ni siquiera hoy en día. Y una vez dejado claro que no creían que tuviera sentido aplicar el cálculo de probabilidades al caso, los autores del informe se sumergían en él de manera detallada, no por convencimiento, sino por obligación, y desmontaban punto por punto la teoría de Bertillon y los demás acusadores.

El 12 de julio de 1906 la condena de Dreyfus fue anulada y el militar fue rehabilitado en su puesto en el ejército. Hasta qué pun-

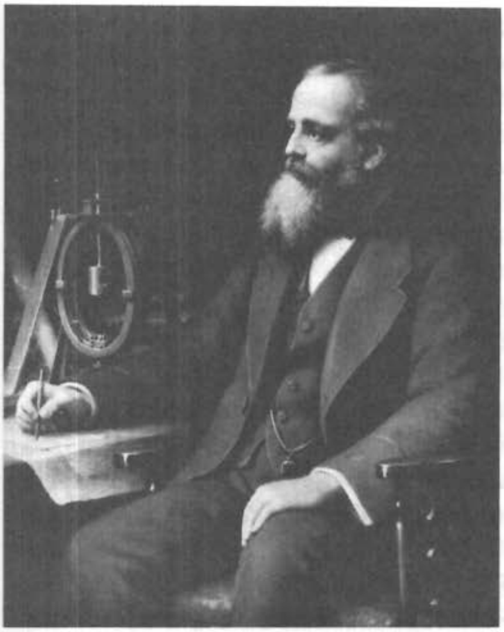






FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
James Clerk Maxwell, cuya teoría sobre el electromagnetismo fue particularmente estudiada por Poincaré.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Einstein (a la izquierda) y Lorentz fotografiados frente a la casa de este último en Leiden en 1921.

FOTO INFERIOR:
Henri Poincaré fotografiado en su despacho, cuando el científico francés ya gozaba de un enorme prestigio intelectual.

to tuvo influencia el informe de Poincaré es difícil de valorar. Lo cierto es que, por aquel entonces, ya era el matemático de mayor prestigio de Francia, formaba parte del *establishment* y no se había pronunciado en público ni a favor ni en contra de Dreyfus, por lo que su opinión podía considerarse como verdaderamente imparcial y respetuosa con el Estado y el ejército franceses.

LA CÁTEDRA DE FÍSICA

La incorporación de Poincaré a la cátedra de Física Matemática y Probabilidades en 1886 coincidió con el inicio de su interés por los problemas de física de la época. En 1890 se editó, en forma de manual, el primer tomo de los apuntes de clase de las lecciones de electricidad y óptica que Poincaré había dado en el segundo semestre del curso 1888-1889, dentro de su asignatura de física matemática. Un segundo tomo, publicado en 1891, estaba dedicado a las teorías de Helmholtz y los experimentos de Hertz sobre las ondas electromagnéticas.

En su curso, Poincaré explicaba a sus alumnos las diferentes teorías del electromagnetismo existentes en la época, con especial atención a la de Maxwell. Este había expuesto su teoría en su obra *Tratado de electricidad y magnetismo* (1873). En ella unificaba las leyes de la electricidad y del magnetismo bajo un único conjunto de ecuaciones, conocido como «ecuaciones de Maxwell», y predecía la existencia de ondas electromagnéticas, de las cuales la luz sería un caso particular.

La teoría de Maxwell tenía aceptación en Gran Bretaña, donde era continuadora de la obra de William Thomson, lord Kelvin, y, sobre todo, de Michael Faraday, pero no estaba tan aceptada en Europa. En Alemania convivía con las secuelas de teorías alternativas como la de Weber, o formulaciones más o menos equivalentes, como la de Helmholtz. En Francia no había tenido mucha aceptación, ya que los físicos estaban netamente divididos entre los experimentales y los teóricos que, como Poincaré, eran matemáticos o tenían una fuerte formación matemática. El estilo de

Maxwell, que describía los fenómenos a la vez que exponía las ideas físicas y las matemáticas necesarias, no había sido suficientemente apreciado y era tachado de poco riguroso. En este sentido, Poincaré comenzaba su curso con estas palabras:

> La primera vez que un lector francés abre el libro de Maxwell, un sentimiento de malestar, y a veces incluso de desconfianza, se mezcla de entrada con su admiración. No es hasta después de una atención prolongada y al precio de muchos esfuerzos que este sentimiento se disipa. Algunos espíritus eminentes lo conservan todavía. ¿Por qué las ideas del sabio inglés tienen tanta dificultad en aclimatarse entre nosotros? Es sin duda porque la educación recibida por la mayoría de los franceses ilustrados les dispone al gusto por la precisión y la lógica por encima de cualquier otra calidad.

Poincaré, con sus lecciones de electricidad y óptica, iba a terminar de abrir paso en Francia a las ideas de Maxwell, desempeñando un papel similar al que Boltzmann, también maxwelliano, había desempeñado en el ámbito germano.

La teoría de Maxwell era lo que se conoce como una «teoría de campos», expresión que había sido introducida por Faraday para designar a una zona del espacio en que se ponían de manifiesto fuerzas eléctricas o magnéticas. Pero era también una explicación mecánica del electromagnetismo. Como ya se expuso en el primer capítulo, para Maxwell los fenómenos eléctricos eran la manifestación de las expansiones y compresiones de un fluido, el éter, que lo impregnaba todo. Los fenómenos magnéticos eran la consecuencia del movimiento del éter, que formaba torbellinos, de forma análoga a los que se observan en un fluido turbulento. Así como unas tensiones descompensadas pueden generar movimiento, los campos eléctricos variables pueden generar campos magnéticos. Si el movimiento puede generar tensiones mecánicas, el campo magnético variable puede, a su vez, generar un campo eléctrico. La teoría unificaba los fenómenos eléctricos y magnéticos en una descripción conjunta. Pero también predecía la existencia de ondas en el éter. Estas ondas serían en cierta forma análogas a las que se propagan por una cuerda

tensa y Maxwell dedujo sus propiedades y su velocidad de sus ecuaciones. Como la velocidad calculada era próxima a la de la luz, Maxwell concluyó que la luz era una de estas ondas, una onda electromagnética.

Entre 1886 y 1888 Hertz realizó una serie de experimentos que demostraron la existencia de ondas electromagnéticas de longitud mucho más grande que la de la luz. El descubrimiento de Hertz dio un espaldarazo definitivo a la teoría de Maxwell y fue la clave para que terminara imponiéndose sobre las teorías rivales. Pero la teoría no estaba exenta de dificultades, algunas de ellas reconocidas por el propio Maxwell en su tratado.

MAXWELL EN DIFICULTADES

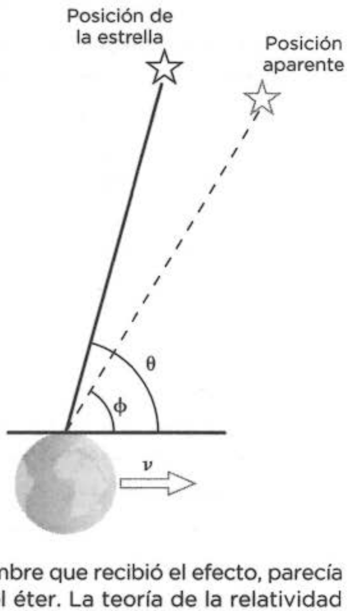
Las principales dificultades de la teoría de Maxwell tenían que ver con la naturaleza de la carga eléctrica. Para Maxwell, como antes para Faraday, las cargas eléctricas no tenían existencia independiente, sino que eran singularidades o discontinuidades en las tensiones del éter. Esto contrastaba cada vez más con la evidencia experimental, porque cada vez estaba más claro que los rayos catódicos, uno de los temas más en boga a finales del siglo XIX entre los físicos experimentales, estaban compuestos de diminutas partículas cargadas (nuestro electrón de hoy en día). La electrolisis también parecía indicar la existencia de partículas cargadas, en este caso los iones.

Varios científicos tanto en Inglaterra como en Alemania contribuyeron a desarrollar la teoría de Maxwell, depurando sus descripciones matemáticas, simplificando la notación, reduciendo el número total de ecuaciones necesarias y distinguiendo entre ellas dos jerarquías: ecuaciones fundamentales y ecuaciones que dependían del material tratado. Pero, aparte de los problemas con la existencia de cargas individuales, también surgieron otras dificultades. En concreto, empezó a ser necesaria una descripción coherente de los fenómenos electromagnéticos cuando había materiales en movimiento, y esto era especialmente importante en la

descripción de los fenómenos luminosos. El problema fundamental era saber si la velocidad de la luz dependía del movimiento del cuerpo emisor, del receptor, del medio en que se encontraba o de todo a la vez. En la teoría de Maxwell parecía claro que la velocidad de la luz calculada (los conocidos casi 300 000 km/s) se refería al sistema de referencia en que el éter se encuentra en reposo. Ello daba lugar a preguntas como estas: ¿se movía la Tierra respecto al éter?, si un medio estaba en movimiento, por ejemplo el agua circulando por un canal, ¿arrastraba al éter con él?

El fenómeno conocido como aberración estelar parecía indicar que, efectivamente, la Tierra se movía respecto al éter y las medidas de Hippolyte Fizeau (1819-1896) sobre la velocidad de la

LA ABERRACIÓN ESTELAR



El astrónomo inglés James Bradley (1693-1762) descubrió que la traslación de la Tierra alrededor del Sol afectaba a la posición aparente de las estrellas. Bradley detectó que las estrellas situadas cerca del polo norte describían a lo largo del año una pequeña elipse, que tenía la misma amplitud para todas ellas. El astrónomo dedujo que este movimiento aparente era debido a que la posición de la estrella cambiaba según la velocidad de la Tierra. El efecto se produce porque la trayectoria de la luz se ve afectada por el movimiento terrestre, y la luz parece venir, parcialmente, del lugar hacia donde nos dirigimos. El fenómeno es análogo a lo que ocurre con las gotas de lluvia cuando vamos andando rápido o corriendo: aunque las gotas caigan verticalmente, vistas por nosotros parecen caer inclinadas y debemos inclinar el paraguas para no mojarnos. La aberración estelar, nombre que recibió el efecto, parecía indicar que la Tierra se movía respecto del éter. La teoría de la relatividad explica claramente el fenómeno. En particular, la regla relativista de adición de velocidades predice exactamente la magnitud del efecto observado.

luz en el agua en movimiento parecían indicar que esta arrastraba parcialmente al éter. Pero, por otra parte, Albert Abraham Michelson (1852-1931) y Edward Morley (1838-1923), en un famoso experimento, demostraron que la luz se movía a la misma velocidad independientemente de si el rayo se movía en la misma dirección que la Tierra o en una dirección perpendicular. En definitiva, era como si el éter estuviera pegado a la Tierra, o, simplemente, como si el éter no existiera. En fin, cada uno de estos fenómenos aportaba evidencias contradictorias entre sí.

LORENTZ AL RESCATE

El holandés Hendrik Lorentz abordó los problemas de la teoría de Maxwell y resolvió algunos de ellos. Su teoría era una síntesis de las ideas de Maxwell y de algunas otras al estilo de Weber. Para Lorentz existían partículas con masa y carga eléctrica, los electrones y los iones. Estas partículas creaban a su alrededor un campo eléctrico. Si estaban en movimiento, creaban también un campo magnético. Estos campos cumplían las ecuaciones de Maxwell y actuaban, a su vez, sobre cualquier otra partícula cargada que estuviera en su seno. La fuerza que estos campos ejercían sobre cualquier otra partícula cargada tenía la siguiente expresión:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

expresión que hoy día se conoce como «fuerza de Lorentz». En esta fórmula q es la carga de la partícula; $\vec{v}$, su velocidad; $\vec{E}$, el campo eléctrico; $\vec{B}$, el campo magnético, y $\times$ denota el producto vectorial.

Estos conceptos son familiares hoy en día en las teorías físicas; la división del problema entre partículas, por un lado, y campos, por otro, es común no solo al electromagnetismo, sino también a las otras fuerzas fundamentales de la naturaleza. Einstein, muchos años más tarde, en 1953 y en elogio de Lorentz, decía lo siguiente:

Los físicos de nuestra época no tienen, en general, plena conciencia del papel decisivo que jugó Lorentz en la estructuración de las ideas fundamentales de la física teórica. La razón de este extraño hecho es que las ideas básicas de Lorentz han llegado a ser tan familiares que resulta difícil advertir lo audaces que fueron y hasta qué punto han simplificado los fundamentos de la física.

También Lorentz en 1892 encontró una transformación de coordenadas que dejaba invariantes la ecuación de las ondas electromagnéticas. La propiedad más importante de estas transformaciones era que la velocidad de la luz permanecía inalterada al aplicarlas. Esto es, si para pasar de un observador a otro en movimiento respecto del primero aplicamos las transformaciones de coordenadas descubiertas por Lorentz, ambos observadores asignarán el mismo valor a la velocidad de la luz. Poincaré llamó más tarde a este cambio de coordenadas «transformaciones de Lorentz», nombre con el que se conocen hoy en día. Una de las características más llamativas de las transformaciones de Lorentz es que asignan un tiempo diferente a cada observador, tiempo que Lorentz llamaba «tiempo local», porque su valor dependía del punto de observación.

Poincaré volvió a dar su curso sobre electricidad y óptica en 1899 y los apuntes de este curso fueron publicados en 1901 bajo el título *Electricidad y óptica, segunda edición*. Esta edición contenía lo esencial de la anterior y añadía una descripción detallada de las teorías de la electrodinámica de cuerpos en movimiento de Hertz, Larmor y Lorentz. Estos tres científicos basaban sus teorías en las ecuaciones de Maxwell, aunque las adaptaban de manera diferente al caso de cuerpos en movimiento, tratando de explicar los hechos experimentales conocidos.

De todas ellas Poincaré contemplaba la teoría de Lorentz como la más plausible. En ella se explicaban los experimentos de Fizeau y la aberración estelar. En la edición de *Electricidad y óptica* de 1901 Poincaré, a la hora de discutir el problema de la aberración estelar, utilizaba el concepto de tiempo local que Lorentz había introducido en 1892. Este tiempo dependía de las coordenadas, por lo que era diferente para diferentes puntos del espa-

cio. Pero la teoría tenía dos graves problemas a los ojos de Poincaré: no respetaba el principio de acción y reacción y tampoco estaba de acuerdo con el principio de relatividad. Estos dos puntos fueron analizados en detalle en un artículo escrito por Poincaré en 1900, con motivo del vigésimo quinto aniversario del doctorado de Lorentz.

El principio de acción y reacción es la tercera ley de Newton: si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejerce una fuerza igual y de signo contrario sobre el primero. El incumplimiento de este principio abría la puerta a situaciones paradójicas, como la posibilidad de construir un móvil perpetuo. En su artículo, Poincaré demostraba que la expresión usada por Lorentz para la fuerza sobre una partícula en movimiento no respetaba, en general, este principio. Y concluía: «En la teoría de Lorentz el principio de acción y reacción no debe aplicarse a la materia sola». Poincaré sostenía que había que incluir al éter en este balance de fuerzas. A la postre, esta sería la clave para la solución del problema.

El segundo punto conflictivo era el principio de relatividad. Según este, las leyes de la mecánica deben ser las mismas para todos los observadores independientemente de si se mueven uniformemente unos respecto de otros, lo que se conoce como «observadores inerciales». Galileo, a quien debemos este principio, lo expuso en los siguientes términos: si estamos en la bodega de un barco refugiado en un puerto seremos incapaces de decidir, por experimentos físicos, si el barco está amarrado al muelle o si se mueve por las aguas quietas con velocidad uniforme. Es decir, no hay un sistema de referencia privilegiado. Poincaré estaba convencido de la validez de este principio para todos los fenómenos físicos, ya que, como veremos en el próximo capítulo, desdeñaba el concepto de espacio absoluto.

La fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ no parecía respetar este principio. La dificultad estaba en que Lorentz, al mezclar en ella los conceptos de partícula y campo, mezclaba dos físicas diferentes. El lado de la izquierda de la ecuación sigue las leyes de la mecánica de Newton. En ellas se cumple el principio de relatividad, y no hay un sistema de referencia —un observador— privilegiado: la fuerza es la misma para todos los observadores. El lado

EL EXPERIMENTO DE FIZEAU

Fizeau diseñó y realizó en 1851 un experimento para medir la velocidad de la luz por un tubo por el que circulaba agua a gran velocidad. Fizeau encontró que la velocidad de la luz en el agua en movimiento era:

$$c' = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

donde n es el índice de refracción del agua y u su velocidad. Este resultado trajo de cabeza a los mejores físicos de la segunda mitad del siglo XIX. Por un lado, si el movimiento del agua no afectaba al éter para nada, el resultado que cabría esperar era c/n, la velocidad de la luz en el agua en reposo. Por otro, si el agua arrastraba al éter en su movimiento el resultado debía ser la suma de las dos velocidades $c/n + u$. La fórmula de Fizeau no respondía a ninguna de las opciones, sino que daba un resultado intermedio. Los físicos empezaron a especular que el agua arrastraba «parcialmente» al éter. Este resultado no fue explicado correctamente hasta que Lorentz introdujo algunos conceptos relativistas. La regla de adición relativista de las velocidades da perfecta cuenta de él.



Hippolyte Fizeau.

de la derecha contiene los campos eléctricos y magnéticos, que son propiedades mecánicas del éter y, por tanto, parece que esos campos deben cambiar de expresión al cambiar de referencia, porque no serán lo mismo si estamos en reposo respecto del éter o nos movemos respecto de él.

Lorentz y Poincaré se cartearon sobre este asunto y no cabe duda de que ese intercambio influyó notablemente en la forma en que ambos enfrentaron estas dificultades. En particular, Lorentz fue despojando al éter de entidad: el éter no sentía tensiones ni podía ponerse en movimiento por ninguna reacción de la materia ponderable. El éter de Lorentz terminaría teniendo, en su última versión, las mismas propiedades que el vacío. Poincaré se fue convenciendo poco a poco de que lo que había que modificar no era

la ecuación de la fuerza de Lorentz, sino el modo de tratar al lado izquierdo de la ecuación o, lo que es lo mismo, las leyes de la mecánica de Newton.

En el umbral del siglo XX, cuando Poincaré escribió la segunda edición de sus apuntes de clase para el curso de física teórica, Lorentz había conseguido dar una explicación unificada a un amplio conjunto de fenómenos. Por todo ello obtuvo en 1902, junto a Pieter Zeeman (1865-1943), el premio Nobel de Física. Poincaré no fue ajeno a este hecho, ya que él y Mittag-Leffler promovieron la candidatura del insigne físico holandés.

EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Antes de 1905, viviendo en Berna, Einstein y dos colegas suyos solían leer libros de filosofía y discutían a menudo sobre lo leído. Uno de los libros que leyeron y discutieron era el ensayo de Poincaré *Ciencia e hipótesis*. Einstein contaba así el impacto que les causó la lectura: «Este libro nos impresionó profundamente y nos mantuvo sin aliento durante semanas». En el próximo capítulo volveremos sobre este libro, en el que Poincaré repasaba el estado de las matemáticas y la física de principios del siglo XX. Por ahora baste decir que, entre otras cosas, Poincaré cuestionaba la existencia de un espacio y un tiempo absolutos: «No hay espacio absoluto y no concebimos sino movimientos relativos». Y también: «No hay tiempo absoluto; decir que dos duraciones son iguales es una afirmación que por sí misma no tiene ningún sentido y que no puede adquirirse sino convencionalmente». Aún más importante, y algo que sin duda dio mucho que pensar al joven Einstein: «No solo no tenemos intuición directa de la igualdad de dos duraciones, sino que no tenemos siquiera la de la simultaneidad de dos sucesos que se producen en lugares diferentes».

Los años 1904 a 1906 pueden ser considerados como los fundacionales de la teoría especial de la relatividad. En 1904 Lorentz publicó un artículo en *Actas de la Academia de Ciencias de Ámsterdam* titulado «Fenómenos electromagnéticos en un sistema que

se mueve con una velocidad menor que la de la luz». En 1905 Einstein publicó en la revista alemana *Annalen der Physik* su artículo «Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento». Y en 1906 Poincaré publicó en la revista del *Circolo Matematico di Palermo* un artículo titulado «Sobre la dinámica del electrón». Estos tres artículos suponen una ruptura con la mecánica newtoniana e inician una de las revoluciones conceptuales más profundas de la historia de la física.

> «Es difícil separar el problema cualitativo de la simultaneidad del problema cuantitativo de la medida del tiempo. Porque tanto si nos servimos de un cronómetro, como si tenemos en cuenta una velocidad de transmisión, como la de la luz, no sabríamos medir tal velocidad sin *medir* el tiempo.»
>
> — Henri Poincaré en *El valor de la ciencia*.

En su artículo de 1904 Lorentz demostró que sus transformaciones de las coordenadas espaciales y del tiempo no alteraban la forma de las ecuaciones de Maxwell. Es decir, si utilizamos estas transformaciones para definir las coordenadas espaciales y temporales en un nuevo sistema de referencia que se mueve a una velocidad constante respecto del inicial, las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético, en este nuevo sistema, tienen la misma forma que en el sistema inicial. Lorentz también encontró cómo se transforman los campos, las cargas y las corrientes al pasar de un sistema a otro. Estas transformaciones se conocen hoy como «transformaciones relativistas de los campos y de sus fuentes». Lorentz explicaba con su teoría el resultado negativo de varios experimentos que intentaban detectar el éter, como el de Michelson y Morley. Por último, dedujo la ecuación de movimiento de un electrón, que difería de la que se obtiene aplicando la mecánica de Newton, y hacía predicciones sobre la deflexión que sufre un electrón en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Uno de los efectos relativistas más notables, la contracción de los objetos en la dirección de movimiento, era introducido por Lorentz como hipótesis, demostrando que era consistente con el resto de

LA FÓRMULA $E=mc^2$

En un artículo publicado en 1900 con la ocasión del aniversario del doctorado de Lorentz, Poincaré analizó si el principio de acción y reacción y el principio de relatividad se cumplían en la teoría del físico holandés. En la primera parte del artículo Poincaré demostró que el principio de acción y reacción debía aplicarse a la materia y al éter (esto es, a la radiación emitida) si se quería mantener como principio. Para analizar el principio de relatividad Poincaré propuso una situación idealizada: un sistema emite luz durante un intervalo de tiempo dado en una dirección. Como consecuencia de lo establecido para el principio de acción y reacción era necesario que el emisor sufriera un retroceso. Al analizar este retroceso desde el sistema de referencia inicial y desde el sistema de referencia en el que la partícula emisora está en reposo después de la emisión, Poincaré encontró una discordancia en la cantidad de movimiento que vale, en notación actual,

$$p=\frac{E}{c^2}v,$$

donde E es la energía emitida en forma de luz; c, la velocidad de la luz, y v, la velocidad de retroceso. Recordemos que la expresión clásica para la cantidad de movimiento de una partícula es $p=mv$. Poincaré concluía su artículo preguntándose si era necesario modificar profundamente las ideas de la electrodinámica. Einstein, por su parte, analizaba un proceso similar en un breve artículo titulado «¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido en energía?», que fue publicado en 1905, justo después de su artículo fundacional sobre la teoría de la relatividad. Einstein abordó el siguiente caso: un sistema emite una cierta cantidad de luz, pero ahora lo hace en los dos sentidos, de forma que no hay retroceso. Al analizar el proceso desde un sistema en que la partícula está en reposo y otro en que la partícula está en movimiento, Einstein encontró una discrepancia entre la energía cinética inicial y final de la partícula dada por

$$\frac{1}{2}\frac{E}{c^2}v^2,$$

Comparando con la expresión clásica de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$, Einstein concluía que «la masa de un cuerpo es una medida de su contenido en energía; si la energía cambia en E, la masa cambia en el mismo sentido en E/c^2». Ambos físicos, usando argumentos parecidos, llegaron a la misma expresión, pero la diferencia de interpretación llevó a Einstein a hacer una predicción que se corroboró experimentalmente casi treinta años más tarde. Su fórmula es quizá la más famosa de toda la física.

la teoría. Por otro lado, al referirse al tiempo definido en el nuevo sistema de referencia hablaba siempre de «tiempo local».

El artículo de Einstein de 1905 es el más claro y fácil de leer de los tres. Einstein introdujo en él los dos postulados de la teoría especial de la relatividad: el postulado de relatividad: todos los fenómenos físicos son los mismos para dos observadores en movimiento relativo uniforme; y el postulado de constancia de la velocidad de la luz: la luz se propaga siempre en el espacio vacío con una velocidad definida que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor.

> «La introducción de un éter lumínico se mostrará superflua, puesto que la idea que se va a desarrollar aquí no requerirá de un espacio en reposo absoluto, dotado de propiedades especiales.»
>
> — Albert Einstein en «Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento» (1905).

Estos dos postulados son contradictorios solo en apariencia. Einstein dedujo de ellos las transformaciones de Lorentz, y esta es quizá su aportación más original. En su artículo, Einstein enunciaba diversas consecuencias de los dos postulados y de las transformaciones de Lorentz:

1. La simultaneidad de dos sucesos es relativa. Cosas que suceden simultáneamente para un observador no lo son para otro en movimiento respecto del primero.

2. La contracción de los objetos en la dirección de movimiento. La magnitud de esta contracción es la misma que la deducida por Lorentz y hoy en día es conocida como «contracción de Lorentz-Fitzgerald».

3. La dilatación del tiempo. Los relojes del segundo sistema de referencia se retrasan respecto del sistema inicial.

En la interpretación de estos efectos es donde Einstein difería de Lorentz y Poincaré. Para Einstein el tiempo medido para el

observador en movimiento es «el tiempo» sin calificativos; es el tiempo que medirá un reloj bien construido. No es un tiempo aparente, ni local, ni de ningún otro tipo. En su artículo, Einstein decía explícitamente que un reloj se retrasaría respecto de otro al moverse. En 1905 era imposible comprobar esta afirmación, porque el efecto es sumamente pequeño, pero a lo largo del siglo XX ello ha sido comprobado en numerosas ocasiones.

Einstein también dedujo en su artículo la regla de adición de velocidades relativistas. Otros de sus resultados fueron la invariancia de las ecuaciones de Maxwell (en una demostración idéntica a la de Lorentz), la transformación relativista de los campos (igual a la obtenida por Lorentz), la transformación relativista de las densidades de carga y corriente (aquí hay una leve diferencia con Lorentz, que había cometido un pequeño error), la fórmula para la aberración estelar y el efecto Doppler, y las ecuaciones de movimiento del electrón (presentadas de manera un poco diferente, pero equivalentes a las de Lorentz).

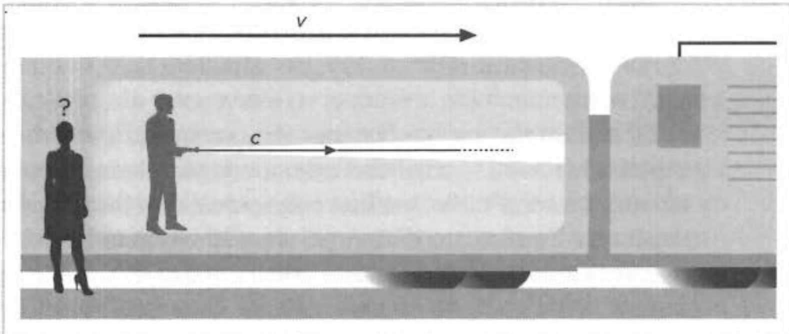
Poincaré escribió su artículo en el verano de 1905 y presentó entonces un resumen de sus resultados a la Academia de Ciencias de París. El artículo completo apareció publicado en 1906. El matemático francés resolvía en él las contradicciones de la teoría de Lorentz: la teoría no viola el principio de relatividad si todas las fuerzas se transforman de manera similar a las fuerzas electromagnéticas, es decir, de forma consistente con las transformaciones de Lorentz. Poincaré no dedujo las transformaciones de Lorentz de los dos postulados, pero sí demostró que las transformaciones no contradicen el principio de relatividad e implican la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores. De forma similar a como hizo Einstein, Poincaré dedujo también la regla de adición de las velocidades. En cuanto al campo electromagnético, los resultados de Poincaré son idénticos a los de Einstein: obtuvo las transformaciones relativistas de los campos y de las fuentes, corrigiendo también el pequeño error de Lorentz. Poincaré dedujo igualmente las ecuaciones de movimiento, de forma especialmente elegante, utilizando el llamado «principio de mínima acción». Estas ecuaciones eran las mismas que había deducido Lorentz.

LA SUMA RELATIVISTA DE VELOCIDADES

El segundo postulado de la relatividad dice que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores. Este postulado parece absurdo desde el punto de vista clásico. Imaginemos a un hombre subido en un tren en marcha y a una mujer que observa todo desde el andén de una estación por la que el tren pasa sin parar (véase la figura). Llamemos v a la velocidad del tren y c a la velocidad de la luz. Si el hombre enciende una linterna apuntando en la dirección de movimiento del tren, la mujer debería observar que la luz de la linterna va a una velocidad $c+v$. Al menos este sería el resultado que cabría esperar si aplicamos la física clásica. Pero ello sería contrario al segundo postulado. Si la nueva mecánica se debe ajustar al segundo postulado es necesario cambiar la regla de adición de las velocidades. Einstein y Poincaré obtuvieron, de forma independiente, la regla relativista de adición de velocidades. En el ejemplo anterior, la nueva regla dice que si el hombre ve a un objeto moverse a una velocidad u, la mujer ve al objeto moverse con una velocidad dada por:

$$\tilde{u} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Esta regla se reduce a la regla clásica ($u+v$) para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz. Si en la fórmula sustituimos u por c obtenemos $\tilde{u} = c$, de acuerdo con el segundo postulado de la relatividad.



En su artículo de 1906 Poincaré hizo un primer intento de adecuar la ley de Newton de la gravitación universal a la nueva mecánica. Propuso una fórmula para el potencial gravitatorio que se transformaba correctamente bajo las transformaciones

de Lorentz. Como sabemos, la teoría relativista de la gravedad iba a ser algo mucho más complejo, y fue la gran obra de Albert Einstein.

A partir de 1901, Walter Kaufmann (1871-1947) realizó una serie de experimentos sobre la deflexión de los electrones por campos eléctricos y magnéticos. Este físico alemán usaba los electrones emitidos por la radiación del radio, que eran más energéticos que los que se podían obtener por entonces con un tubo de rayos catódicos. Sus velocidades eran, por tanto, más próximas a la de la luz y era de esperar que los efectos relativistas fueran más notables. En 1905 Kaufmann mejoró su equipo y obtuvo medidas aparentemente precisas. El análisis detallado de estas medidas invalidaba las predicciones realizadas por las ecuaciones de Einstein, Lorentz y Poincaré. Al conocer los resultados, Lorentz escribió una carta a Poincaré, fechada en marzo de 1906, en la que no ocultaba su desánimo y, casi, desesperación:

> Desgraciadamente mi hipótesis de la contracción del electrón está en contradicción con los resultados de los nuevos experimentos del señor Kaufmann y creo que estoy obligado a abandonarla; ya no comprendo nada [«*je suis donc au bout de mon latin*», en el original en francés]. Sería muy feliz si usted llegara a aclarar las dificultades que surgen de nuevo.

La actitud de Lorentz contrastaba con la de Einstein, que contemplaba la nueva teoría con tanta confianza, dada su coherencia y su acuerdo con otros hechos conocidos, que dudaba de los resultados de Kaufmann. El tiempo dio a Einstein la razón.

LA RELACIÓN ENTRE TRES GENIOS

Poincaré y Lorentz se conocieron personalmente, tuvieron una relación cordial y se admiraban mutuamente, como demuestran los artículos de ambos y el tono de las cartas que intercambiaron. Einstein, por su parte, adoraba a Lorentz y ambos tuvieron una

muy buena relación hasta la muerte del físico holandés en 1928; se intercambiaron numerosas cartas y se encontraron en diversas ocasiones. Hay que decir que debía ser difícil llevarse mal con Lorentz. Este unía a su inteligencia y sabiduría una gran presencia de carácter: sabía discutir sin alterarse ni irritar al oponente. Era el perfecto organizador para un encuentro científico, ya que dirigía con habilidad las discusiones. Sirva de ejemplo el detalle de que, como dominaba varios idiomas, escribía a los franceses en francés, a los ingleses en inglés y a los alemanes en alemán. Todo el mundo le admiraba y le respetaba.

Más difícil de calibrar es la relación entre Poincaré y Einstein. Tal vez la temprana muerte de Poincaré impidió un mayor acercamiento entre ellos. Lo cierto es que en sus escritos posteriores a 1906 ambos se ignoraron mutuamente. Ni Einstein citó nunca a Poincaré en sus artículos sobre relatividad ni Poincaré citó a Einstein. En contraste, ambos citaron a Lorentz repetidamente. El biógrafo de Einstein Abraham Pais cuenta que Einstein no leyó el artículo de Poincaré de 1906 hasta muchos años después de su publicación, cuando el físico alemán ya vivía en Estados Unidos y estaba casi jubilado. Pero, como hemos visto, Einstein sí había leído a Poincaré antes de 1905 y conocía sus ideas sobre la simultaneidad y la inexistencia del espacio absoluto. Einstein y Poincaré se encontraron una sola vez, con motivo del primer Congreso Solvay, celebrado poco antes de la muerte del matemático francés.

Lo único que sabemos de cómo Poincaré valoraba a Einstein es lo que está recogido en una carta dirigida al físico francés Pierre Weiss (1865-1940), director del Instituto de Física de Zúrich, en noviembre de 1911, relativa a la posible contratación de Einstein como profesor en la institución suiza (contratación que se produjo unos meses después). La cita, aunque un poco larga, merece la pena por dos cosas: por un lado, queda claro que Poincaré tenía a Einstein en gran estima, al menos desde el punto de vista científico; por otro, nos ayuda a entender cómo concebía Poincaré la ciencia. La carta dice así:

> El señor Einstein es uno de los espíritus más originales que he conocido; a pesar de su juventud, ha alcanzado ya un puesto muy ho-

> norable entre los primeros sabios de su tiempo. Lo que más debemos admirar en él es la facilidad con la que se adapta a los nuevos conceptos y sabe extraer todas las consecuencias. No se queda aferrado a los principios clásicos, y, en presencia de un problema físico, es rápido en considerar todas las posibilidades. Ello se traduce inmediatamente en su espíritu en la predicción de fenómenos nuevos, susceptibles de ser un día verificados por la experiencia. No quiero decir que todas estas predicciones superen el control de la experiencia el día que ese control sea posible. Como busca en todas las direcciones, debemos, al contrario, esperar que la mayor parte de esas vías que emprende sean callejones sin salida; pero debemos esperar al mismo tiempo que una de las direcciones indicadas sea la buena; eso es suficiente. Es así como se debe proceder. El papel de la física matemática es realmente el de hacer preguntas, y no es sino la experiencia quien puede responderlas. El futuro mostrará cada vez más cuál es el valor del señor Einstein, y la universidad que sepa vincularse a este joven maestro tiene asegurado obtener de ello muchos honores.

Con la perspectiva que da el tiempo no podemos sino admirar la perspicacia de Henri Poincaré.

CAPÍTULO 6

Filósofo y autor de éxito

Henri Poincaré mantuvo siempre un vivo interés por la filosofía de la ciencia. Escribió no pocos artículos en los que reflexionaba sobre la creatividad en matemáticas, los fundamentos de la geometría o el futuro de la física. En aquella época, a finales del siglo XIX y principios del XX, varias escuelas empiristas dominaban el panorama filosófico. Poincaré, aunque cercano a las ideas de uno de los empiristas más reconocidos, Ernst Mach, creó su propia línea de pensamiento.

El año 1900 fue un año muy especial en París. Con motivo del cambio de siglo se celebraron multitud de encuentros y actividades. Henri Poincaré participó entonces en tres grandes reuniones científicas, que tuvieron lugar, casi simultáneamente, a principios de agosto: el Congreso Internacional de Filósofos, el Congreso Internacional de Física y el Congreso Internacional de Matemáticas, del que era presidente. Poincaré expuso en estos encuentros sus ideas generales sobre la filosofía de la ciencia y las bases del conocimiento matemático.

Desde el principio de su carrera científica Poincaré se interesó por la filosofía de la ciencia y por la fundamentación de los conceptos matemáticos. También le interesó la divulgación científica y publicaba con cierta regularidad en periódicos y revistas dirigidos a un público más amplio que el estrictamente académico. Por iniciativa de Gustave Le Bon (1841-1931), los editores Ernest y Camille Flammarion llegaron a un acuerdo con él para recopilar en una serie de libros sus ensayos. Estos cuatro libros fueron *Ciencia e hipótesis* (1902), *El valor de la ciencia* (1905), *Ciencia y método* (1908) y *Sabios y escritores* (1910); a ellos debe añadirse *Últimos pensamientos*, publicado póstumamente en 1913. Henri Poincaré se reveló en estos libros como un gran ensayista, con una prosa directa y elegante. La colección obtuvo un gran éxito de ventas. Desde el día de su publicación y hasta 1914 se vendieron, por ejem-

plo, 20900 ejemplares de *Ciencia e hipótesis*, 21000 de *El valor de la ciencia*, 12000 de *Ciencia y método*... Los libros fueron traducidos a varios idiomas, y siguen vendiéndose hoy en día. Los hermanos Flammarion ganaron una fortuna con la serie y Poincaré aumentó notablemente su patrimonio con los derechos de autor.

«Sucede que justamente en la demostración de los teoremas más elementales es donde los autores de tratados clásicos han desplegado menos precisión y rigor.»

— Henri Poincaré, en *Ciencia e hipótesis*.

La filosofía de Poincaré ha recibido el nombre de *convencionalismo*. En el convencionalismo de Poincaré las matemáticas ocupan un lugar especial, y se diferencian del resto de las ciencias. En matemáticas, Poincaré sostenía que los axiomas o hipótesis son convenciones que adoptamos por simple elección. Un ejemplo muy utilizado por él para explicar este concepto era el de las geometrías no euclídeas. La geometría de Euclides está construida sobre cinco axiomas. El quinto es el axioma de las paralelas: por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a ella. Este axioma se puede reemplazar por otro, de forma que se obtiene una geometría no euclídea que, como demostraron Lobachevski y Bolyai, es totalmente consistente. Para Poincaré una geometría no es más verdadera que otra, y que adoptemos el quinto postulado de Euclides o uno diferente depende de la elección que hagamos. La única imposición es que la geometría resultante esté libre de contradicciones.

En cuanto a la geometría del espacio físico, lo único que cabe preguntarse es: ¿qué geometría es más conveniente? En principio la geometría euclídea es más simple y está de acuerdo con nuestra experiencia cotidiana sobre la forma de los objetos rígidos. Pero si una medida astronómica muestra, por ejemplo, que los ángulos de un triángulo no suman 180 grados, podemos sacar dos conclusiones alternativas: o bien la geometría del espacio deja de ser euclídea o bien la luz no se mueve en línea recta entre dos puntos. En el momento en que escribía esto, Poincaré concluyó que, pues-

INTERCAMBIO CON RUSSELL

El matemático y filósofo Bertrand Russell (1872-1970) ganó el premio Nobel de Literatura en 1950 por su obra de marcado carácter humanista. Entre 1910 y 1913 publicó, junto con Alfred Whitehead (1861-1947), los *Principia Mathematica*. Esta obra era un intento de dotar a todo el edificio de las matemáticas de la época de una estructura perfectamente lógica. Russell mantuvo un debate filosófico con Poincaré sobre la naturaleza del pensamiento matemático y, en particular, sobre los fundamentos lógicos de la geometría. El debate entre ambos estuvo siempre presidido por la intachable honradez intelectual que les caracterizaba. Ninguno de los dos tenía reparos en admitir los argumentos del otro o corregir los errores propios. Habiendo Russell reconocido que Poincaré llevaba razón en algunas de sus críticas a un artículo suyo, Poincaré contestó con un artículo en la publicación francesa *Revista de metafísica y de moral*. El artículo empezaba así: «En la respuesta del señor Russell admiro una cualidad más rara de lo que se piensa, una perfecta lealtad científica».



Bertrand Russell en un óleo del pintor inglés Roger Fry (1923).

to que los científicos elegirían sin duda la segunda opción, la geometría euclídea no tenía que temer una refutación experimental. Este razonamiento de Poincaré ha quedado superado por la teoría general de la relatividad, en la cual la luz se mueve a lo largo de las líneas más cortas, geodésicas, de un espacio curvado. Y la curvatura del espacio es una cantidad accesible, en principio, al experimentador.

En otro orden de cosas, a finales del siglo XIX y principios del XX las matemáticas vivían una cierta tendencia hacia la sistematización lógica de todo el edificio construido. El matemático alemán David Hilbert (1862-1943) era uno de los promotores de esta visión de las matemáticas. Bertrand Russell, en Inglaterra, era otro de los líderes de esta corriente de sistematización. Poincaré mantuvo varias controversias con ambos sobre los fundamentos de las matemáticas,

mostrando siempre una firme posición a favor de la intuición como uno de los pilares del pensamiento creativo en matemáticas.

El convencionalismo de Poincaré tenía un matiz distinto cuando se trataba de las ciencias físicas. En *El valor de la ciencia* analizaba, como ejemplo, el cálculo de la velocidad de la luz a partir de las observaciones del astrónomo danés Ole Rømer (1644-1710). Rømer se sirvió de los eclipses de las lunas de Júpiter para calcular la velocidad de la luz. Observó que los eclipses, que se producían a intervalos regulares, se iban retrasando a lo largo del año, a medida que la Tierra se alejaba de Júpiter, para luego adelantarse cuando la Tierra se acercaba a Júpiter. Rømer supuso que el retraso se debía a que la luz tenía que recorrer una distancia cada vez mayor, por lo que tardaba más en llegar a la Tierra. De sus observaciones dedujo que la luz tardaba 22 minutos en recorrer la órbita terrestre. El neerlandés Christiaan Huygens (1629-1695) se sirvió de este dato para, unos años más tarde, calcular la velocidad de la luz.

Poincaré llamaba la atención sobre el hecho de que este procedimiento requiere dos hipótesis: que la luz viaja a una velocidad que es la misma durante toda su trayectoria y que las leyes de Newton determinan el tiempo de la órbita de los satélites de Júpiter en torno al planeta. Otra elección de las hipótesis podría dar cuenta del fenómeno observado, pero la constancia de la velocidad de la luz es una hipótesis más conveniente. Las reglas, sostenía Poincaré, no se nos imponen, y podríamos divertirnos en inventarnos otras. Sin embargo, no sabríamos salir adelante con esas reglas inventadas sin complicar en exceso las leyes de la física, la mecánica o la astronomía. Pero es fácil malinterpretar a Poincaré y, de hecho, una interpretación errónea de sus palabras dio lugar a una famosa controversia.

¿GIRA LA TIERRA EN TORNO A SÍ MISMA?

Como ya se ha apuntado, Poincaré fue uno de los ponentes del Congreso Internacional de Filosofía que se celebró en París con motivo de la Exposición Universal de 1900. En su conferencia, titulada «Sobre los principios de la mecánica», defendió su posición,

ya conocida, de que no existe un espacio absoluto y que solo detectamos el movimiento relativo. Para explicar sus ideas puso el ejemplo del movimiento de la Tierra. No tiene sentido decir que la Tierra gira sobre sí misma porque no tenemos una referencia absoluta respecto de la cual podamos comprobar que se mueve. Y decía más: «Las dos proposiciones, "la Tierra gira sobre sí misma" y "es más conveniente suponer que la Tierra gira sobre sí misma", tienen el mismo significado». Esta frase dio lugar a una larga controversia, en especial con el filósofo Édouard Le Roy (1870-1954). Ambos sabios coincidieron y debatieron en una reunión en la Sociedad Filosófica de Francia. En un momento dado de su intervención Le Roy dijo: «El hecho científico es creado por el sabio», un razonamiento muy en la línea de su predecesor en el Colegio de Francia, el filósofo Henri Bergson (1859-1941). Poincaré preguntó: «Sea usted más exacto, ¿qué entiende por hecho?». Le Roy contestó: «Un hecho es, por ejemplo, la rotación de la Tierra», a lo que Poincaré replicó: «No, un hecho, por definición, es algo que puede probarse por un experimento directo. Por esta razón, la rotación de la Tierra no es un hecho». Y esta frase, sacada de contexto, iba a ser repetida una y otra vez en la prensa y en otros foros públicos. En particular, la prensa ultracatólica la entendió como una disculpa de la actitud de la Iglesia en el proceso contra Galileo.

A principios de 1904 se produjo en Francia una gran controversia entre católicos y laicos. Un libro titulado *El Evangelio y la Iglesia*, escrito por el teólogo Alfred Loisy (1857-1940), había sido condenado por el Santo Oficio por cuestionar los dogmas de Roma. Mientras los periódicos católicos atacaban a Loisy, los laicos le defendían. Y algunos escritores laicos evocaron el juicio de Galileo y la condena de la Iglesia a su tesis sobre el movimiento de la Tierra. Hubo una cadena de reacciones por los dos bandos, y apareció un artículo del periodista Édouard Drumont (1844-1917) en el que se apelaba a la autoridad de Poincaré y ponía en su boca la siguiente frase a propósito de la rotación de la Tierra: «Es una hipótesis atractiva y conveniente para explicar la formación y evolución de los mundos, pero después de todo, es una hipótesis que no puede ser confirmada ni refutada por ninguna evidencia objetiva». Drumont, conocido por su antisemitismo y miembro de la facción más

reaccionaria del periodismo francés, no solo malinterpretaba a Poincaré, sino que ni siquiera le citaba literalmente. El periódico *Le Figaro* se hizo eco del artículo de Drumont, reinterpretando a su vez las palabras de Poincaré que, según el periódico, «sin afirmar que la Tierra no gira, afirma que nada prueba que lo haga». Las referencias periodísticas a la controversia se multiplicaron.

«La experiencia es la única fuente de la verdad: solo ella puede enseñarnos algo nuevo, solo ella puede darnos la certeza.»

— Henri Poincaré, en *Ciencia e hipótesis*.

Poincaré se vio obligado a explicarse, y envió una carta abierta al astrónomo Camille Flammarion (1842-1925) que fue publicada en el *Boletín de la Sociedad Astronómica de Francia* en mayo de 1904. En ella Poincaré recordaba el marco de la controversia con Le Roy y que el contexto de sus frases era el de una discusión filosófica, en el que el lenguaje tiene un significado muy preciso.

Poincaré volvió sobre el tema en *El valor de la ciencia*. En este ensayo repitió la frase ya citada de «Las dos proposiciones, "la Tierra gira sobre sí misma" y "es más conveniente suponer que la Tierra gira sobre sí misma", tienen el mismo significado». Tras explicar el sentido filosófico de esta afirmación añadía:

> Pero aún hay más; en el mismo lenguaje se puede muy bien decir: estas dos proposiciones, «el mundo exterior existe» o «es más cómodo suponer que el mundo exterior existe», tienen uno solo y mismo significado. Así la hipótesis de la rotación de la Tierra conserva el mismo grado de certeza que la existencia de los objetos exteriores.

Para no dejar lugar a dudas sobre la certeza de la rotación de la Tierra, Poincaré repasaba luego todos los fenómenos observados que se explican por esta rotación. Que una hipótesis sea conveniente no quiere decir que sea arbitraria. Los experimentos determinan qué hipótesis es más conveniente que otra. Y la hipótesis de la rotación de la Tierra explica toda una serie de fenómenos que, de otra forma, no estarían relacionados.

Los argumentos de Poincaré iban en el sentido de la tradición empirista. En la misma obra recuerda su controversia con Le Roy y aclara que para él «un hecho» es la percepción sensible de las cosas; lo demás son interpretaciones convenientes de las cosas. Por ejemplo, si observamos la desviación de un galvanómetro con la ayuda de un espejo móvil que proyecta una imagen luminosa sobre una regla graduada, el hecho bruto es que vemos desplazarse la luz sobre la escala; el hecho científico es que pasa corriente por un circuito eléctrico. El científico no inventa el hecho bruto, lo interpreta de la manera más conveniente.

POINCARÉ ENTRA EN LA HISTORIA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Muy poco antes de su inesperada muerte, Poincaré hizo una última aportación valiosa a la física del siglo XX. Habiendo participado en la revolución relativista, su genio no podía pasar sin dejar su huella en la otra gran revolución de la física del siglo XX, la revolución cuántica. Esta tuvo su origen en diciembre de 1900, cuando Max Planck dio a conocer su teoría de la radiación térmica. En ella Planck introdujo lo que se dio en llamar «la hipótesis cuántica». Unos meses antes Planck había encontrado, de forma semiempírica, una fórmula que reproducía las medidas experimentales llevadas a cabo por Heinrich Rubens (1865-1922) y Ferdinand Kurlbaum (1857-1927) en el Instituto Imperial de Física y Tecnología de Berlín.

La ley de Planck describe cómo varía la intensidad de la radiación emitida por un cuerpo caliente con la longitud de onda de la radiación emitida. En particular, la ley de Planck se centra en el caso de un cuerpo negro ideal: aquel que absorbe y emite con igual eficacia a todas las longitudes de onda. La fórmula de Planck se puede escribir como:

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1},$$

POINCARÉ EN EL BUREAU DES LONGITUDES

Desde 1893 Poincaré perteneció al Bureau des Longitudes, la oficina francesa encargada de calcular las efemérides astronómicas, una cuestión que tenía una importancia capital para la navegación de aquella época. Poincaré participó regularmente en las actividades del Bureau y lo presidió en tres ocasiones. Fue un ardiente defensor de la misión francesa que se ocupó desde 1898 de la medida del meridiano terrestre que pasa por Quito (Ecuador). La misión tuvo que hacer frente a muchas dificultades y sufrió diversos retrasos. Poincaré informó sobre ella en varias ocasiones e insistió una y otra vez en su importancia ante el Gobierno de la nación. En julio de 1907 el matemático comunicó el éxito definitivo de la misión. Por otra parte, Poincaré presidió el comité interministerial que propuso la adhesión definitiva de Francia a la toma del meridiano de Greenwich como referencia del origen de las longitudes geográficas y de los husos horarios. En una ocasión, comentó al respecto: «Hemos recibido una comunicación del director del observatorio de México que tengo el placer de referir aquí: "Hay en Francia una ciudad, dice este astrónomo, que tiene precisamente el mismo meridiano que Greenwich, es Argentan. Adopten en Francia la hora de Argentan, y el amor propio francés estará a salvo", he aquí una solución», concluyó Poincaré entre risas.

donde u_ν es la densidad de energía electromagnética radiada; ν, la frecuencia; *c*, la velocidad de la luz; *k*, la constante de Boltzmann; *T*, la temperatura del cuerpo radiante, y *h*, una constante que hoy en día lleva el nombre de constante de Planck. Para cada temperatura la radiación es máxima a una frecuencia dada (o su longitud de onda correspondiente). Así, a los 100 °C de un radiador doméstico el máximo de la intensidad se encuentra en una longitud de onda de 8 micras, que corresponde al infrarrojo. Para el hierro fundido, a 1535 °C, el máximo está todavía en el infrarrojo cercano, pero una buena cantidad de la radiación se produce en el visible. Para 5505 °C, la temperatura de la superficie del Sol, el máximo está en el amarillo.

Max Planck intentó deducir su fórmula a partir de las leyes generales de la física. Imaginó que la radiación era emitida por un conjunto de cargas oscilantes que radiaban energía electromagnética de acuerdo con las leyes del electromagnetismo formuladas por Maxwell. Utilizó las ideas de Boltzmann respecto a la interpretación probabilística del calor y, en particular, del concepto de entropía. E introdujo una hipótesis *ad hoc*: que la energía de los

osciladores no podía tener un valor cualquiera, sino que solo podía valer un número entero de veces una cantidad discreta, un cuanto, de valor $E = h\nu$. Planck introdujo esta hipótesis sin plena consciencia de lo que representaba, como un artificio matemático que le conducía a la ley que, sabía, era experimentalmente correcta.

Los años que siguieron a la publicación del artículo de Planck fueron de gran discusión entre los físicos teóricos de la época. Algunos se dieron cuenta pronto de que era una hipótesis ajena a la física clásica, ya que esta no ponía ninguna restricción a los valores que pudiera tener la energía de un oscilador, menos aún obligar a que estuviera relacionada con la frecuencia. Pero la hipótesis cuántica había venido para quedarse. En 1905 Albert Einstein la aplicó a otros fenómenos relacionados con la emisión y absorción de la luz, en especial al problema del efecto fotoeléctrico. La teoría del efecto fotoeléctrico le valió a Einstein, años más tarde, en 1921, el premio Nobel de Física.

En este estado de cosas el físico y químico alemán Walther Nernst (1864-1941) organizó, con el patrocinio del químico y millonario belga Ernest Solvay (1838-1922), un encuentro de los líderes de la física europea para discutir diversos aspectos de la teoría cuántica. La reunión, primera de una serie de encuentros que han entrado a formar parte de la historia mítica de la física del siglo XX, se celebró entre el 30 de octubre y el 3 de noviembre de 1911 en el Hotel Metropole de Bruselas. Según la convocatoria, el primer Congreso Solvay, que ese fue el nombre que recibió el simposio, estaba dedicado al estudio de «la teoría de la radiación y los quanta». A él asistieron, entre otros, Albert Einstein, Max Planck, Hendrik Lorentz, Walther Nernst, Marie Curie, Ernest Rutherford, Arnold Sommerfeld y Wilhelm Wien. También asistió Henri Poincaré. Allí conoció a Einstein, siendo la única vez que ambos coincidieron en persona.

Uno de los temas de discusión del momento era hasta qué punto la hipótesis cuántica era esencial para obtener la ley de Planck de la radiación de cuerpo negro. Lorentz, Einstein y el mismo Planck habían deducido la ley de varias formas diferentes, pero siempre tenían que introducir la hipótesis cuántica para llegar al resultado correcto. Otros físicos, como sir James Jeans (1877-1946) o John Strutt, barón de Rayleigh (1842-1919), habían deducido fór-

MAX PLANCK (1858-1947)



Planck enunció en 1900 la hipótesis cuántica, según la cual la energía mecánica de un oscilador microscópico no puede tener un valor cualquiera, sino que está limitada a una serie de valores discretos. Esta hipótesis abrió el camino al desarrollo de la física cuántica, la teoría física del mundo atómico y subatómico. Planck tuvo una gran influencia en la física alemana de la primera mitad del siglo XX. Promovió el estudio de la física teórica y ayudó y promocionó a los grandes físicos del ámbito alemán de la época como Einstein, Meitner o Schrödinger. Durante la ascensión del nazismo mantuvo una dura pugna con los sectores antisemitas de la física alemana por el control de las instituciones científicas e intentó limitar las repercusiones negativas de la política de Hitler para la ciencia alemana. En la actualidad, la mayor institución científica de Alemania lleva su nombre.

mulas alternativas basándose exclusivamente en argumentos clásicos, pero sus fórmulas no se ajustaban a los resultados experimentales. La pregunta que estaba en el aire era: ¿es la hipótesis cuántica imprescindible para explicar la radiación térmica? Dicho de otra forma, ¿existe alguna deducción alternativa de la ley de Planck que no recurra a la cuantificación? En el lenguaje matemático al uso podríamos plantear el problema diciendo que la hipótesis cuántica era condición suficiente para la ley de Planck de la radiación, pero ¿era también condición necesaria?

Poincaré, que hasta entonces no había sentido especial interés por los problemas en torno a la hipótesis cuántica, se interesó inmediatamente por el problema. Especialmente por dilucidar la necesidad de la hipótesis cuántica. Y una vez más dio muestras de su gran capacidad como físico teórico. Al volver a París, se puso inmediatamente a trabajar sobre el problema de la radiación de cuerpo negro. Tan solo un mes más tarde, presentó sus conclusio-

nes a la Academia de Ciencias de París, y en enero apareció en la revista *Journal de Physique Théorique et Appliquée* un artículo con todos los detalles.

El artículo tenía 34 páginas y era un alarde de técnica matemática. Poincaré demostró rigurosamente que una ley continua para el movimiento, no solo no podía reproducir la fórmula de Planck, sino que no daría ni siquiera una energía finita para todo el conjunto. Algunas de las técnicas usadas por Poincaré eran nuevas en el campo de la mecánica estadística y serían usadas posteriormente por otros físicos teóricos como el propio Planck, pasando a formar parte de las técnicas estándar en mecánica estadística.

La conclusión del artículo de Poincaré era la misma a la que ya habían llegado otros físicos como Paul Ehrenfest (1880-1933), pero la forma en que Poincaré la presentaba era especialmente convincente: la física clásica no podía dar cuenta de la teoría de la radiación del cuerpo negro; la hipótesis cuántica era inevitable.

POINCARÉ Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En su libro *La ciencia y el método* Poincaré dedicó un capítulo a la enseñanza de las matemáticas. En él, sin desdeñar la importancia de la lógica en la construcción de las matemáticas, recalcó la necesidad de utilizar la intuición y los conceptos cotidianos para enseñar esta ciencia. Poincaré se preguntaba qué era una buena definición. La respuesta no puede ser la misma para un matemático o un filósofo que cuando hablamos de enseñar. Así, escribía, al referirse a la enseñanza: «Una buena definición es aquella que es comprendida por los alumnos». Y añadía: «¿Cómo es que hay tantos espíritus que se niegan a comprender las matemáticas? [...] Una ciencia que no utiliza sino los principios fundamentales de la lógica, [...] de los que no podríamos despojarnos sin dejar de pensar, y ¡hay gente que los encuentra oscuros! ¡Y además son la mayoría!». Al repasar la evolución de los últimos años del siglo XIX Poincaré reconocía que las matemáticas habían ganado en rigor lógico, pero ese rigor se conseguía a base de ir construyendo unos conceptos sobre otros previos y el conjunto resultaba incomprensible para los alumnos principiantes. Poincaré defendía que había que tomar, en la enseñanza, un camino más parecido a la evolución histórica de las matemáticas, empezando por los conceptos presentados de forma intuitiva, aunque no fuera un proceder riguroso, para ir edificando poco a poco el edificio.

El artículo de Poincaré tuvo una considerable repercusión. Tras su publicación, ya no podía quedar en Europa ningún escéptico al respecto de la hipótesis cuántica. Especialmente Jeans, en Inglaterra, se convenció de la necesidad de la hipótesis cuántica y cambió la actitud de los británicos frente al cuanto. En Francia, el artículo de Poincaré puso a la teoría cuántica en el centro de la agenda de los físicos teóricos y correspondió a un francés, Louis de Broglie (1892-1987), dar, unos años más tarde, un paso decisivo en la construcción de la teoría cuántica.

POINCARÉ MUERE EN PARÍS

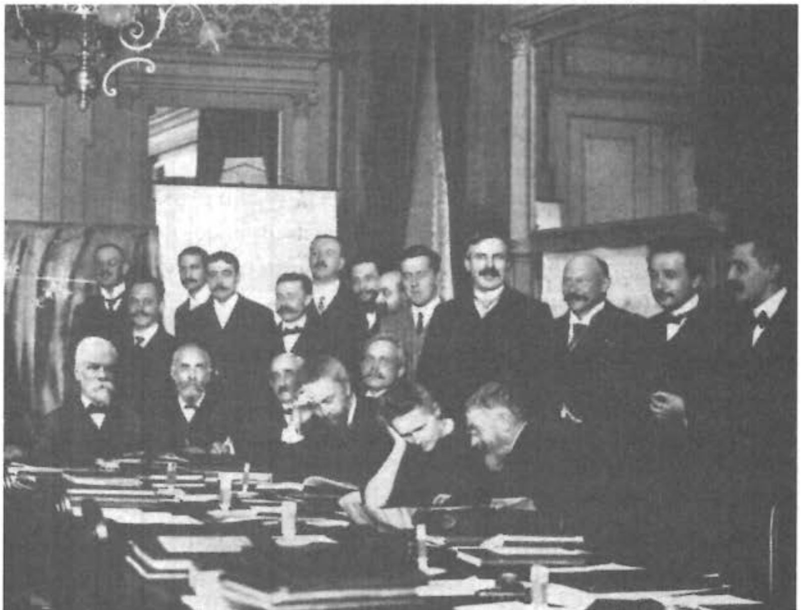
Durante el Congreso Matemático Internacional de 1908, celebrado en Roma, la hipertrofia de próstata que Poincaré padecía desde hacía algún tiempo se agravó, lo que le obligó a someterse a una operación de urgencia. Fue operado en Roma por cirujanos italianos. Al principio pudo recuperar toda su actividad, pero pronto recayó. En marzo de 1909, en una carta a David Hilbert, a propósito de la invitación que el matemático alemán le había realizado para visitar Gotinga, Poincaré advertía lo siguiente:

> Hay un punto sobre el que desearía llamar su atención. Todavía estoy bajo el golpe del accidente que me afectó el año pasado en Roma y estoy imperiosamente obligado a ciertas precauciones. No puedo beber ni vino ni cerveza, solamente agua. No puedo asistir a un banquete, ni a una comida prolongada. Esta circunstancia me ha hecho dudar de aceptar su invitación, pero he pensado que usted sabrá disponer las cosas en consecuencia.

La situación siguió empeorando y ya en diciembre de 1911, confesaba a Giovanni Battista Guccia, editor de la revista italiana *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, que, a su edad, quizá no tuviera tiempo de terminar sus últimas investigaciones sobre el problema de los tres cuerpos. El sábado 6 de julio de 1912, tras una reunión en la facultad sobre la teoría de grupos, le dijo a su amigo







FOTOS SUPERIORES:
Placas conmemorativas de la muerte de Henri Poincaré.

FOTO INFERIOR:
Fotografía dedicada a los participantes del Congreso Solvay de 1911. Poincaré es el primero de la derecha, sentado junto a Marie Curie; detrás se encuentra Albert Einstein.

Paul Appell: «Mañana ingreso en el hospital para la operación». Le operaron el día 9 y, al principio, todo pareció ir bien. Le dieron de alta en el hospital y volvió a su casa para recuperarse. Sin embargo, el día 17 de julio murió de una embolia durante una cura rutinaria.

UN ENTIERRO DE ESTADO

Henri Poincaré fue enterrado el 19 de julio de 1912 en un ambiente de consternación nacional. El cortejo fúnebre salió de su casa hacia la iglesia de Saint-Jacques du Haut-Pas y de allí se dirigió al cementerio de Montparnasse. Varias personalidades públicas acompañaban al féretro, entre ellas, el presidente de la Academia Francesa y el Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes. El ministro rindió homenaje a Poincaré con estas retóricas palabras:

> La muerte de Henri Poincaré, que une en un común sentimiento de pesar a la élite intelectual de todos los países, es para nosotros un duelo público. Al unirse a él, el Gobierno es el intérprete de la nación entera, dolorosamente afectada. Porque, a pesar de que los trabajos del matemático solo son accesibles a un pequeño número de personas, todos saben que Henri Poincaré representaba lo que la genialidad de Francia tiene de más puro y de más desinteresado, lo mejor de sí misma.

También su amigo de toda la vida, y decano entonces de la Facultad de Ciencias, Paul Appell, acompañaba el féretro. Appell escribiría años más tarde:

> La vida de Poincaré fue una meditación intensa e ininterrumpida. Estuvo exclusivamente dedicada al trabajo científico y a la familia. Su persona será siempre objeto de admiración y un ejemplo para la juventud de Francia.

En el quinto Congreso Internacional de Matemáticas, que tuvo lugar en agosto de 1912 en Cambridge, pocas semanas después de su muerte, Poincaré fue homenajeado por sus colegas de toda

Europa. El presidente del congreso, sir George H. Darwin (1845-1912), hijo del célebre naturalista, pronunció estas palabras en la inauguración:

> Fue en Roma hace cuatro años cuando la primera sombra de oscuridad de esa enfermedad, que ha terminado ahora tan mortalmente, cayó sobre nosotros. Todos ustedes recuerdan la consternación que se apoderó de todos nosotros cuando las primeras palabras pasaron de hombre a hombre: «Poincaré está enfermo». Habíamos esperado que pudiéramos oír de nuevo de su boca alguna ponencia tan iluminadora como la que dio en Roma; pero no fue así, y la pérdida de Francia con su muerte afecta al mundo entero.

EPÍLOGO

En torno a 1912 Europa se dirigía inadvertida pero inexorablemente hacia la catástrofe. Los odios generados en conflictos anteriores, el auge de los nacionalismos, el militarismo rampante, la carrera de armamentos, la lucha por la expansión colonial y otros factores adicionales condujeron a las potencias europeas a la guerra. El 18 de febrero de 1913 Raymond Poincaré, que había ganado las elecciones, accedió a la presidencia de la República, cargo que ejercería durante toda la guerra. Henri Poincaré no vivió para ver a su primo en la más alta magistratura del Estado ni tampoco para padecer las penalidades de la guerra. Pero sí era consciente de los males que amenazaban a su país y a Europa, y dejo oír su autorizada voz en un discurso ante la Liga de la Educación Moral el 26 de junio de 1912, tan solo unas semanas antes de su muerte:

> Verdaderamente el odio es una fuerza, y una fuerza muy poderosa. Pero no podemos servirnos de ella, porque rebaja, porque es como unos anteojos, en los que solo se ven los grandes trazos; porque el odio es nefasto y no hace verdaderos héroes. No sé si al otro lado de ciertas fronteras hay gente dispuesta a alimentar el patriotismo con odio, pero sí que sé bien que entre nosotros semejante método sería

totalmente contrario a nuestro temperamento, a nuestras tradiciones, a nuestras aspiraciones. Los ejércitos franceses se han batido siempre por alguien o por algo, y no contra alguien, y creo que no han luchado peor por ello. [...] Eso es todo de lo que el odio es capaz y es eso lo que no queremos. Acerquémonos, aprendamos a conocernos y, por ello, a estimarnos, para perseguir un ideal común. Guardémonos de imponer medios uniformes, eso es irrealizable, además de indeseable. La uniformidad es la muerte, porque cierra la puerta a todo progreso. Además, toda coacción es estéril y odiosa.

Pero los Gobiernos y los jefes militares de Europa ya habían realizado su apuesta. Las palabras de Poincaré, como las de los pocos intelectuales de toda Europa que se opusieron a la guerra, cayeron en saco roto.

La familia de Poincaré anunció su muerte en una esquela en la que se podía leer:

Henri Poincaré, miembro de la Academia Francesa y de la Academia de Ciencias, miembro del Bureau des Longitudes, Inspector General de Minas, profesor de la Facultad de Ciencias, profesor honorario de la Escuela Politécnica, miembro del Consejo del Observatorio de París y del Consejo de los Observatorios de Provincias, miembro asociado de la Academia de Stanislas de Nancy, miembro extranjero de la Real Sociedad de Londres, de la Academia dei Lincei, de las Academias de Estocolmo, Copenhague, Budapest, Gotinga, Upsala, Bucarest, etc., miembro honorario extranjero de las Academias de Viena, Edimburgo, Dublín, etc., miembro asociado de las Academias de Bruselas, Washington, etc., miembro correspondiente de las Academias de Berlín, San Petersburgo, Ámsterdam, Múnich, etc., comandante de la Legión de Honor, oficial de Instrucción Pública, comandante de primera clase de la Estrella Polar de Suecia.

Como se ve, Poincaré había alcanzado las más altas distinciones y los mayores reconocimientos en todo el mundo.

Henri Poincaré escribió decenas de libros y cientos de artículos. La extensión de su obra es tan inabarcable como su profundidad. El último de los universalistas, en palabras del matemático

Eric Temple Bell (1883-1960), investigó en todas las ramas de las matemáticas y de la física teórica de su tiempo. En este libro nos hemos acercado a sus descubrimientos sobre las funciones automórficas, el problema de los tres cuerpos, la topología y la relatividad. También hemos glosado su obra como filósofo. Pero además de todo ello, Poincaré hizo notables aportaciones a la teoría de números, la teoría de grupos, la teoría de funciones, la telegrafía sin hilos, el cálculo de probabilidades y la cosmología. Todo ello haciendo gala siempre de una inquebrantable honradez intelectual y de un compromiso leal con su país y la sociedad en la que vivió.

Lecturas recomendadas

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2009.

BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

DE LORENZO, J., *Poincaré. Matemático visionario, politécnico escéptico*, Madrid, Nivola, 2009.

ESCOHOTADO A., *Caos y orden*, Madrid, Espasa, 1999.

GRAY, J., *Henri Poincaré. A Scientific Biography*, Nueva Jersey, Princeton University Press, 2013.

PÉREZ, A., *Nuestra vida en el campo electromagnético*, Córdoba, Almuzara, 2010.

POINCARÉ, H., *Ciencia e hipótesis*, Madrid, Espasa, 2002.

STEWART, I., *Los grandes problemas matemáticos*, Barcelona, Crítica, 2014.

—: *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

VERHULST, F., *Henri Poincaré. Impatient Genius*, Nueva York, Springer, 2012.

Índice